Varietà di Grassmann in Geometria Algebrica

Scuola di Dottorato, Gargnano

10-14 Aprile 2007 

Giorgio Ottaviani
ottavian@math.unifi.it

www.math.unifi.it/ottavian

Università di Firenze 

Seconda lezione

- Calcolo di Schubert e applicazioni enumerative, le formule di Pieri e Giambelli.
- L’approccio di Gatto con le derivazioni.

L'anello moltiplicativo di $Gr(k, n)$

- La struttura moltiplicativa in $H^*(Gr(k, n))$ ha una struttura elegante.

L'anello moltiplicativo di $Gr(k, n)$

- La struttura moltiplicativa in $H^*(Gr(k, n))$ ha una struttura elegante.
- Le classi di Chern dei fibrati universale (risp. quoziente) rappresentano dei cicli di Schubert speciali che generano $H^*(Gr(k, n))$.

L'anello moltiplicativo di $Gr(k, n)$

- La struttura moltiplicativa in $H^*(Gr(k,n))$ ha una struttura elegante.
- Le classi di Chern dei fibrati universale (risp. quoziente) rappresentano dei cicli di Schubert speciali che generano $H^*(Gr(k,n))$.
- Nel caso dello spazio proiettivo la struttura moltiplicativa è data essenzialmente dal teorema di Bezout.

L’anello moltiplicativo di $Gr(k, n)$

- La struttura moltiplicativa in $H^*(Gr(k, n))$ ha una struttura elegante.
- Le classi di Chern dei fibrati universale (risp. quoziente) rappresentano dei cicli di Schubert speciali che generano $H^*(Gr(k, n))$.
- Nel caso dello spazio proiettivo la struttura moltiplicativa è data essenzialmente dal teorema di Bezout.
- $H^*(\mathbf{P}^n, \mathbf{Z}) = A^*(\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}[H]/(H^{n+1})$ dove H è la classe iperpiana.

Le classi di Chern, visione geometrica

Storicamente, i cicli speciali su $Gr(k,n)$ rappresentano le prime classi di Chern che sono state definite.

Le classi di Chern, visione geometrica

Storicamente, i cicli speciali su $Gr(k,n)$ rappresentano le prime classi di Chern che sono state definite.
Viceversa le classi di Chern possono essere definite funtorialmente dalle classi di Chern del fibrato universale (o quoziente).

Classi di Chern del fibrato quoziente, I

- Considero la successione esatta

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Classi di Chern del fibrato quoziente, I

- Considero la successione esatta

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

- Le sezioni immagine di

$$V \longrightarrow H^0(Q)$$

possono essere descritte facilmente.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Fissato $v \in V$ viene indotto sulla fibra di ogni $m \in Gr(k,n)$ l'elemento $[v] \in V/m$, cioè una sezione s_v di Q.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Fissato $v \in V$ viene indotto sulla fibra di ogni $m \in Gr(k,n)$ l'elemento $[v] \in V/m$, cioè una sezione s_v di Q.
- s_v si annulla esattamente su $\{m | v \in m\}$, quindi su un ciclo X_{n-k}.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Fissato $v \in V$ viene indotto sulla fibra di ogni $m \in Gr(k,n)$ l'elemento $[v] \in V/m$, cioè una sezione s_v di Q.
- s_v si annulla esattamente su $\{m | v \in m\}$, quindi su un ciclo X_{n-k}.
- Due sezioni s_v e s_w sono dipendenti se $m + v = m + w$, quindi se e solo se $m \cap < v, w > \neq \emptyset$, quindi su un ciclo X_{n-k-1}.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Fissato $v \in V$ viene indotto sulla fibra di ogni $m \in Gr(k, n)$ l'elemento $[v] \in V/m$, cioè una sezione s_v di Q.
- s_v si annulla esattamente su $\{m | v \in m\}$, quindi su un ciclo X_{n-k}.
- Due sezioni s_v e s_w sono dipendenti se $m + v = m + w$, quindi se e solo se $m \cap < v, w > \neq \emptyset$, quindi su un ciclo X_{n-k-1}.
- t sezioni $s_{v_1}, \ldots, s_{v_t}$ sono dipendenti se $m \cap < v_1, \ldots, v_t > \neq \emptyset$, quindi su un ciclo $X_{n-k+1-t}$.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Si pone $c_i(Q) = X_i$. Pertanto $c_i(Q)$ rappresenta il luogo dove $\mathrm{rk}(Q) + 1 - i$ sezioni di Q sono dipendenti. Imponiamo $(\sum t^i c_i(Q)) \cdot (\sum t^i S_i) = 1$.

Classi di Chern del fibrato quoziente, II

- Si pone $c_i(Q) = X_i$. Pertanto $c_i(Q)$ rappresenta il luogo dove $\mathrm{rk}(Q) + 1 - i$ sezioni di Q sono dipendenti. Imponiamo $(\sum t^i c_i(Q)) \cdot (\sum t^i S_i) = 1$.
- **Teorema** $H^*(Gr(k,n))$ è generato da $c_i(Q)$ con le relazioni $(S_{k+2}, \ldots, S_{n+1})$.

Classi di Chern del fibrato universale, I

- Data

$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$$

descriviamo le sezioni che provengono da $V^* \to H^0(U^*)$. Fissato $f \in V^*$ viene indotto per restrizione $f_{|m} \in m^*$ su ogni $m \in Gr(k,n)$, cioè una sezione s_f di U^*.

Classi di Chern del fibrato universale, I

- Data
$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$$
descriviamo le sezioni che provengono da $V^* \to H^0(U^*)$. Fissato $f \in V^*$ viene indotto per restrizione $f_{|m} \in m^*$ su ogni $m \in Gr(k,n)$, cioè una sezione s_f di U^*.
- s_f si annulla esattamente su $\{m | m \subseteq \ker f\}$, quindi su un ciclo $X_{1^{k+1}}$.

Classi di Chern del fibrato universale, I

- Data
$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$$
descriviamo le sezioni che provengono da $V^* \to H^0(U^*)$. Fissato $f \in V^*$ viene indotto per restrizione $f_{|m} \in m^*$ su ogni $m \in Gr(k,n)$, cioè una sezione s_f di U^*.
- s_f si annulla esattamente su $\{m | m \subseteq \ker f\}$, quindi su un ciclo $X_{1^{k+1}}$.
- Due sezioni s_f e s_g sono dipendenti se $m \cap \ker f = m \cap \ker g$, quindi se e solo se $\dim m \cap (\ker f \cap \ker g) \geq k$, quindi su un ciclo X_{1^k}.

Classi di Chern del fibrato universale, I

- Data
$$0 \longrightarrow Q^* \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O} \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$$
descriviamo le sezioni che provengono da $V^* \to H^0(U^*)$. Fissato $f \in V^*$ viene indotto per restrizione $f_{|m} \in m^*$ su ogni $m \in Gr(k,n)$, cioè una sezione s_f di U^*.
- s_f si annulla esattamente su $\{m | m \subseteq \ker f\}$, quindi su un ciclo $X_{1^{k+1}}$.
- Due sezioni s_f e s_g sono dipendenti se $m \cap \ker f = m \cap \ker g$, quindi se e solo se $\dim m \cap (\ker f \cap \ker g) \geq k$, quindi su un ciclo X_{1^k}.

Funtorialità delle classi di Chern

- Se E è un fibrato globalmente generato di rango r su Y allora $H^0(E) \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow E$ è suriettiva ed induce $f\colon Y \longrightarrow Gr(h^0(E) - r, h^0(E))$ tale che $f^*Q = E$.

Funtorialità delle classi di Chern

- Se E è un fibrato globalmente generato di rango r su Y allora $H^0(E) \otimes \mathcal{O}_Y \longrightarrow E$ è suriettiva ed induce $f: Y \longrightarrow Gr(h^0(E) - r, h^0(E))$ tale che $f^*Q = E$.
- In particolare $c_i(E) = f^*c_i(Q)$ rappresenta il luogo dove $r + 1 - i$ sezioni di E sono dipendenti.

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$

- Qui $c_1(Q) = X_1$, $c_2(Q) = X_2$

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$

- Qui $c_1(Q) = X_1$, $c_2(Q) = X_2$
- $c_1^2 - c_2 = X_{11} = c_2(U)$ Le relazioni sono

$$2c_1c_2 - c_1^3 = 0$$

$$c_2^2 - 3c_1^2c_2 + c_1^4 = 0$$

da cui segue anche

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$

- Qui $c_1(Q) = X_1$, $c_2(Q) = X_2$
- $c_1^2 - c_2 = X_{11} = c_2(U)$ Le relazioni sono

$$2c_1c_2 - c_1^3 = 0$$

$$c_2^2 - 3c_1^2c_2 + c_1^4 = 0$$

da cui segue anche

- $$c_1^4 = 2c_1^2c_2 \qquad c_2^2 = 2c_1^2c_2$$

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$

- Qui $c_1(Q) = X_1$, $c_2(Q) = X_2$
- $c_1^2 - c_2 = X_{11} = c_2(U)$ Le relazioni sono

$$2c_1c_2 - c_1^3 = 0$$

$$c_2^2 - 3c_1^2c_2 + c_1^4 = 0$$

da cui segue anche

- $$c_1^4 = 2c_1^2c_2 \qquad c_2^2 = 2c_1^2c_2$$
- Quindi abbiamo

$$1, c_1, c_2, c_1^2, c_1c_2, c_1^2c_2$$

La formula di Pieri

- In generale $X_\lambda \cdot X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} X_\nu$

La formula di Pieri

- In generale $X_\lambda \cdot X_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} X_\nu$
- Classicamente il problema si risolveva in due parti
  Prima parte

$$X_\lambda \cap c_i(Q) = \sum X_\mu$$

dove μ è ottenuto aggiungendo k caselle a λ, tutte in colonne differenti *(formula di Pieri)*.

Il quiver di Hasse

- La formula di Pieri è sufficiente per descrivere un grafo orientato (quiver) che ha i vertici nei cicli di Schubert.

Il quiver di Hasse

- La formula di Pieri è sufficiente per descrivere un grafo orientato (quiver) che ha i vertici nei cicli di Schubert.
- C'è una freccia da X_λ a X_μ se $X_\lambda \cap X_1 \supseteq X_\mu$

Il quiver di Hasse

- La formula di Pieri è sufficiente per descrivere un grafo orientato (quiver) che ha i vertici nei cicli di Schubert.
- C'è una freccia da X_λ a X_μ se $X_\lambda \cap X_1 \supseteq X_\mu$
- Il grado di ogni ciclo di Schubert può essere calcolato contando induttivamente il numero di cammini che portano dal ciclo al termine del quiver.

La formula di Giambelli

- $$X_\lambda = \det\left(c_{\lambda_i + j - i}\right)_{1 \leq i,j \leq s}$$

  dove $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ e $c_i = c_i(Q)$

La formula di Giambelli

- $$X_\lambda = \det\left(c_{\lambda_i+j-i}\right)_{1\le i,j\le s}$$
  dove $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ e $c_i = c_i(Q)$
- Ad esempio
  $$X_{\lambda_1,\lambda_2} = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} \end{vmatrix}$$
  Concettualmente la formula di Giambelli calcola i luoghi di degenerazione di morfismi tra fibrati.

Dualità di Poincaré

- X_λ e X_μ si incontrano se e solo se λ e la rotazione di $180°$ di μ entrano nel rettangolo $(k+1) \times (n-k)$ senza sovrapposizioni.

Dualità di Poincaré

- X_λ e X_μ si incontrano se e solo se λ e la rotazione di $180°$ di μ entrano nel rettangolo $(k+1) \times (n-k)$ senza sovrapposizioni.
- Il complemento di λ nel rettangolo fornisce il duale di Poincaré λ'.

$$X_\lambda \cdot X_{\lambda'} = 1$$

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi \colon \mathcal{O}^e \to Q$ un morfismo su $Gr(k, n)$

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to Q$ un morfismo su $Gr(k,n)$
- Per $s \leq e-1$ $D_s(\phi) = X_\lambda$ dove $\lambda = ((n-k-s)^{e-s})$.

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to Q$ un morfismo su $Gr(k,n)$
- Per $s \leq e-1$ $D_s(\phi) = X_\lambda$ dove $\lambda = ((n-k-s)^{e-s})$.
- Infatti ϕ corrisponde a $\mathbf{C}^e \subset V$ e se $m \in D_s(\phi)$ allora $\dim(\mathbf{C}^e + m)/m \leq s$ da cui $\dim \mathbf{C}^e \cap m \geq e-s$ che equivale alla tesi.

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to U^\vee$ un morfismo su $Gr(k,n)$

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to U^\vee$ un morfismo su $Gr(k,n)$
- $D_s(\phi) = X_\lambda$ dove $\lambda = ((e-s)^{k+1-s})$.

Luoghi di degenerazionee cicli di Schub

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to U^\vee$ un morfismo su $Gr(k,n)$
- $D_s(\phi) = X_\lambda$ dove $\lambda = ((e-s)^{k+1-s})$.
- Infatti ϕ corrisponde a $\mathbf{C}^{n+1-e} \subset V$ e se $m \in D_s(\phi)$ allora $\dim \mathbf{C}^{n+1-e} \cap m \geq k+1-s$ che equivale alla tesi.

La formula di Porteous-Giambelli

- Sia $\phi \colon \mathcal{O}^e \longrightarrow F$ un morfismo tra fibrati su X, rk F=f

La formula di Porteous-Giambelli

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to F$ un morfismo tra fibrati su X, rk F=f
- $D_k(\phi) := \{x \in X | \text{rk}\,(\phi_x) \leq k\}$.

La formula di Porteous-Giambelli

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to F$ un morfismo tra fibrati su X, rk F=f
- $D_k(\phi) := \{x \in X | \text{rk}\,(\phi_x) \leq k\}$.
- Se F è globalmente generato allora $D_k(\phi) = \emptyset$ oppure codim $D_k(\phi) = (e-k)(f-k)$,

La formula di Porteous-Giambelli

- Sia $\phi\colon \mathcal{O}^e \to F$ un morfismo tra fibrati su X, rk F=f
- $D_k(\phi) := \{x \in X | \text{rk}\,(\phi_x) \le k\}$.
- Se F è globalmente generato allora $D_k(\phi) = \emptyset$ oppure codim $D_k(\phi) = (e-k)(f-k)$,
- Se codim $D_k(\phi) = (e-k)(f-k)$ allora

$$[D_k(\phi)] = \begin{vmatrix} c_{f-k}(E) & c_{f-k+1}(E) & \dots & c_{f-k+(e-k-1)}(E) \\ c_{f-k-1}(E) & c_{f-k}(E) & \dots & c_{f-k+(e-k-2)}(E) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{f-e+1}(E) & c_{f-e+2}(E) & \dots & c_{f-k}(E) \end{vmatrix}$$

Casi particolari di Porteous-Giambelli

- Sia $e \leq f$

Casi particolari di Porteous-Giambelli

- Sia $e \leq f$
- $D_e(\phi) = X$.

Casi particolari di Porteous-Giambelli

- Sia $e \leq f$
- $D_e(\phi) = X$.
- $[D_{e-1}(\phi)] = c_{f-e+1}(F)$

Casi particolari di Porteous-Giambelli

- Sia $e \leq f$
- $D_e(\phi) = X$.
- $[D_{e-1}(\phi)] = c_{f-e+1}(F)$
- $$[D_{e-2}(\phi)] = \begin{vmatrix} c_{f-e+2}(E) & c_{f-e+3}(E) \\ c_{f-e+1}(E) & c_{f-e+2}(E) \end{vmatrix}$$

La curva razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^n$ su P^n

La curva razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^n$ su P^n
- $[D_1(\phi)] = c_{n-1}(\mathcal{O}(1)^n) = n$

La curva razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^n$ su $\mathbf{P}^n$
- $[D_1(\phi)] = c_{n-1}(\mathcal{O}(1)^n) = n$
- L'interpretazione proiettiva è la generazione proiettiva di Steiner

Lo scoppiamento in un punto

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^3$ su P^4

Lo scoppiamento in un punto

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^3$ su $\mathbf{P}^4$
- $[D_1(\phi)] = c_2(\mathcal{O}(1)^3) = 3$

Lo scoppiamento in un punto

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^3$ su P^4
- $[D_1(\phi)] = c_2(\mathcal{O}(1)^3) = 3$
- L'interpretazione proiettiva è P^2 scoppiato in un punto.

La superficie di Bordiga, I

- Sia $\mathcal{O}^3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^4$ su P^4

La superficie di Bordiga, I

- Sia $\mathcal{O}^3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^4$ su P^4
- $[D_2(\phi)] = c_3(\mathcal{O}(1)^4) = 6$

La superficie di Bordiga, I

- Sia $\mathcal{O}^3 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^4$ su $\mathbf{P}^4$
- $[D_2(\phi)] = c_3(\mathcal{O}(1)^4) = 6$
- Definiamo X con una proiezione su $\mathbf{P}^2$

La superficie di Bordiga, II

- ϕ definisce un tensore $3 \times 4 \times 5$

La superficie di Bordiga, II

- ϕ definisce un tensore $3 \times 4 \times 5$
- Si ottiene il piano immerso nelle matrici 4×5.

La superficie di Bordiga, II

- ϕ definisce un tensore $3 \times 4 \times 5$
- Si ottiene il piano immerso nelle matrici 4×5.
- Troviamo $\mathcal{O}^4 \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}(1)^5$ su $\mathbf{P}^2$ Adesso $D_3(\psi) = c_4(\mathcal{O}(1)^5) = 10$. Pertanto la superficie di Bordiga è isomorfa a $\mathbf{P}^2$ scoppiato in 10 punti.

La superficie di Castelnuovo

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2)$ su $\mathbf{P}^4$

La superficie di Castelnuovo

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2)$ su $\mathbf{P}^4$
- $[D_1(\phi)] = c_2(\mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2)) = 5$

La superficie di Castelnuovo

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2)$ su $\mathbf{P}^4$
- $[D_1(\phi)] = c_2(\mathcal{O}(1)^2 \oplus \mathcal{O}(2)) = 5$
- Si tratta di un fibrato in coniche su $\mathbf{P}^1$.

Lo scroll razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^a$ su $\mathbf{P}^n$

Lo scroll razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^a$ su $\mathbf{P}^n$
- $[D_1(\phi)] = c_{a-1}(\mathcal{O}(1)^a) = a$

Lo scroll razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^a$ su $\mathbf{P}^n$
- $[D_1(\phi)] = c_{a-1}(\mathcal{O}(1)^a) = a$
- Ha dimensione $n - a + 1$.

Lo scroll razionale normale

- Sia $\mathcal{O}^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(1)^a$ su $\mathbf{P}^n$
- $[D_1(\phi)] = c_{a-1}(\mathcal{O}(1)^a) = a$
- Ha dimensione $n - a + 1$.

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$ rivisitato

- Qui $c_1(Q) = X_{20}$, $c_2(Q) = X_{10}$

Esempio: $H^*(Gr(1,3))$ rivisitato

- Qui $c_1(Q) = X_{20}$, $c_2(Q) = X_{10}$
- $c_1^2 - c_2 = X_{11} = c_2(U)$

	00	10	20	11	21	22
00	00	10	20	11	21	22
10	10	20 + 11	21	21	22	
20	20	21	22			
11	11	21		22		
21	21	22				
22	22					

La degenerazione

- I risultati del calcolo di Schubert possono spesso essere trovati per degenerazione.

La degenerazione

- I risultati del calcolo di Schubert possono spesso essere trovati per degenerazione.
- Ad esempio per calcolare le rette che toccano 6 piani di $\mathbf{P}^4$, dividi i piani in 3 coppie, ciascuna coppia si incontra in L_i e genera H_i per $i = 1, 2, 3$.

La degenerazione

- I risultati del calcolo di Schubert possono spesso essere trovati per degenerazione.
- Ad esempio per calcolare le rette che toccano 6 piani di $\mathbf{P}^4$, dividi i piani in 3 coppie, ciascuna coppia si incontra in L_i e genera H_i per $i = 1, 2, 3$.
- Le rette sono $H_1 \cap H_2 \cap H_3$, $< H_1 \cap L_2, H_1 \cap L_3 >$, $< H_2 \cap L_3, H_2 \cap L_1 >$,$< H_3 \cap L_2, H_3 \cap L_1 >$, e l'unica retta che tocca L_1, L_2, L_3.

Esempi

- Ci sono 2 rette che toccano 4 rette in $\mathbf{P}^3$

Esempi

- Ci sono 2 rette che toccano 4 rette in $\mathbf{P}^3$
- Ci sono 5 rette che toccano 6 piani in $\mathbf{P}^4$

Esempi

- Ci sono 2 rette che toccano 4 rette in $\mathbf{P}^3$
- Ci sono 5 rette che toccano 6 piani in $\mathbf{P}^4$
- La generica superficie cubica contiene 27 rette

Esempi

- Ci sono 2 rette che toccano 4 rette in $\mathbf{P}^3$
- Ci sono 5 rette che toccano 6 piani in $\mathbf{P}^4$
- La generica superficie cubica contiene 27 rette
- La generica 3-fold quintica contiene 2875 rette (Schubert).

Limiti del calcolo enumerativo

- Ci sono 2 coniche per 4 punti e tangenti a una retta.

Limiti del calcolo enumerativo

- Ci sono 2 coniche per 4 punti e tangenti a una retta.
- C'e' una unica conica tangente a 5 rette

Limiti del calcolo enumerativo

- Ci sono 2 coniche per 4 punti e tangenti a una retta.
- C'e' una unica conica tangente a 5 rette
- Invece $(2H)^5 = 32$

L'approccio differenziale, I

- Gatto considera delle derivazioni su $\bigwedge^{k+1}\left(\mathbf{Z}^{n+1}\right)$ visto come $\mathbf{Z}$-modulo libero.

L'approccio differenziale, I

- Gatto considera delle derivazioni su $\bigwedge^{k+1}\left(\mathbf{Z}^{n+1}\right)$ visto come $\mathbf{Z}$-modulo libero.
- Chiamiamo $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ una base di $\mathbf{Z}^{n+1}$.

L'approccio differenziale, I

- Gatto considera delle derivazioni su $\bigwedge^{k+1}\left(\mathbf{Z}^{n+1}\right)$ visto come $\mathbf{Z}$-modulo libero.
- Chiamiamo $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ una base di $\mathbf{Z}^{n+1}$.
- Ad esempio $D(e_i) = e_{i+1}$ estesa in modo che $D(e_i \wedge e_j) = D(e_i) \wedge e_j + e_i \wedge D(e_j)$ è una derivazione su $\wedge^2\mathbf{Z}^{n+1}$

L’approccio differenziale, II

- Considero $k = 1$, $n = 3$. $D\big(e_1 \wedge e_2\big) = e_1 \wedge e_3$

L'approccio differenziale, II

- Considero $k = 1$, $n = 3$. $D\big(e_1 \wedge e_2\big) = e_1 \wedge e_3$
- $D^2\big(e_1 \wedge e_2\big) = e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4$

L'approccio differenziale, II

- Considero $k = 1$, $n = 3$. $D(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3$
- $D^2(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4$
- $D^3(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_4 = 2e_2 \wedge e_4$

L'approccio differenziale, II

- Considero $k = 1$, $n = 3$. $D(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3$
- $D^2(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4$
- $D^3(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_4 = 2e_2 \wedge e_4$
- $D^4(e_1 \wedge e_2) = 2e_3 \wedge e_4$

L'approccio differenziale, II

- Considero $k = 1$, $n = 3$. $D(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3$
- $D^2(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4$
- $D^3(e_1 \wedge e_2) = e_2 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_4 = 2e_2 \wedge e_4$
- $D^4(e_1 \wedge e_2) = 2e_3 \wedge e_4$
- È evidente l'analogia con l'intersezione su $Gr(1, 3)$, operare con D corrisponde a tagliare col divisore iperpiano.

L'approccio differenziale, III

- Sia $M = (\mathbf{Z}^{n+1})$
  Considero $D_t = \sum_{i \geq 0} D_i t^i \colon \wedge M \to \wedge M[[t]]$ dove per estendere a $\wedge M$ chiediamo che

$$D_t(\alpha \wedge \beta) = D_t(\alpha) \wedge D_t(\beta)$$

  e che $D_i = D^i$ su M.

L'approccio differenziale, III

- Sia $M = (\mathbf{Z}^{n+1})$
  Considero $D_t = \sum_{i \geq 0} D_i t^i \colon \wedge M \to \wedge M[[t]]$ dove per estendere a $\wedge M$ chiediamo che

  $$D_t(\alpha \wedge \beta) = D_t(\alpha) \wedge D_t(\beta)$$

  e che $D_i = D^i$ su M.
- Ad esempio

  $$D_2(\alpha \wedge \beta) = D_2(\alpha) \wedge \beta + D_1(\alpha) \wedge D_1(\beta) + \alpha \wedge D_2(\beta)$$

  e quindi $D_2 \neq D^2$ su $\wedge^2 M$. Infatti $D_2(e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_4$

L’approccio differenziale, IV

- **Teorema (Gatto)** L’anello generato da $D, D_2, \ldots D_{n-k}$ è isomorfo a $H^*(Gr(k,n))$. D_i corrisponde a $c_i(Q)$.

L’approccio differenziale, IV

- **Teorema (Gatto)** L’anello generato da $D, D_2, \ldots D_{n-k}$ è isomorfo a $H^*(Gr(k,n))$. D_i corrisponde a $c_i(Q)$.
- Regola di Leibniz $=$ formula di Pieri.

L'approccio differenziale, IV

- **Teorema (Gatto)** L'anello generato da $D, D_2, \dots D_{n-k}$ è isomorfo a $H^*(Gr(k,n))$. D_i corrisponde a $c_i(Q)$.
- Regola di Leibniz $=$ formula di Pieri.
- Integrazione per parti $=$ formula di Giambelli.

Il grado di $Gr(1, n)$, I

- Mediante l'approccio differenziale si calcola facilmente il grado di $Gr(1, n)$.

Il grado di $Gr(1,n)$, I

- Mediante l'approccio differenziale si calcola facilmente il grado di $Gr(1,n)$.
- $D_1^{2(n-1)}(e_1 \wedge e_2) = \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} D_1^j e_1 \wedge D_1^{2n-2-j} e_2 =$

Il grado di $Gr(1,n)$, I

- Mediante l'approccio differenziale si calcola facilmente il grado di $Gr(1,n)$.
- $D_1^{2(n-1)}(e_1 \wedge e_2) = \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} D_1^j e_1 \wedge D_1^{2n-2-j} e_2 =$
- $= \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} e_{j+1} \wedge e_{2n-j}$

Il grado di $Gr(1,n)$, I

- Mediante l'approccio differenziale si calcola facilmente il grado di $Gr(1,n)$.
- $D_1^{2(n-1)}(e_1 \wedge e_2) = \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} D_1^j e_1 \wedge D_1^{2n-2-j} e_2 =$
- $= \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} e_{j+1} \wedge e_{2n-j}$
- Ci sono soltanto due addendi non nulli, per $j = n-1, n$. Quindi

Il grado di $Gr(1,n)$, I

- Mediante l'approccio differenziale si calcola facilmente il grado di $Gr(1,n)$.
- $D_1^{2(n-1)}(e_1 \wedge e_2) = \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} D_1^j e_1 \wedge D_1^{2n-2-j} e_2 =$
- $= \sum_{j=0}^{2(n-1)} \binom{2n-2}{j} e_{j+1} \wedge e_{2n-j}$
- Ci sono soltanto due addendi non nulli, per $j = n-1, n$. Quindi
- $= \left[\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n}\right] e_n \wedge e_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-2} e_n \wedge e_{n+1}$

Il grado di $Gr(1, n)$, II

- $$\deg Gr(1, n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-2} := C_{n-1}$$

C_n si dice n-esimo numero di Catalan.

Il grado di $Gr(1,n)$, II

- $$\deg Gr(1,n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-2} := C_{n-1}$$

  C_n si dice n-esimo numero di Catalan.
- I primi numeri di Catalan sono $1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots$

Il grado di $Gr(1,n)$, II

- $$\deg Gr(1,n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-2} := C_{n-1}$$
  C_n si dice n-esimo numero di Catalan.
- I primi numeri di Catalan sono $1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots$
- Il numero di triangolazioni di un poligono convesso di $n+2$ lati è C_n. Una triangolazione si ottiene tracciando diagonali che si incontrano al più nei vertici.

rette in ipersuperfici cubiche

Siano $c_i = c_i(U^*)$ su $Gr(1, n)$

- $c_4(S^3(U^*)) = 18c_1^2c_2 + 9c_2^2$ rappresenta la varietà di Fano di codimensione 4 in $Gr(1, n)$.

rette in ipersuperfici cubiche

Siano $c_i = c_i(U^*)$ su $Gr(1,n)$

- $c_4(S^3(U^*)) = 18c_1^2c_2 + 9c_2^2$ rappresenta la varietà di Fano di codimensione 4 in $Gr(1,n)$.
- Il suo grado si ottiene tagliando con c_1^{2n-6} ed è uguale a

$$18 \deg Gr(1,n-1) + 9 \deg Gr(1,n-2) =$$

rette in ipersuperfici cubiche

Siano $c_i = c_i(U^*)$ su $Gr(1,n)$

- $c_4(S^3(U^*)) = 18c_1^2c_2 + 9c_2^2$ rappresenta la varietà di Fano di codimensione 4 in $Gr(1,n)$.
- Il suo grado si ottiene tagliando con c_1^{2n-6} ed è uguale a

$$18 \deg Gr(1,n-1) + 9 \deg Gr(1,n-2) =$$

-

$$= \frac{27(2n-6)!}{(n-3)!(n-1)!}(3n-7)$$

Il grado della Grassmanniana

- $$\deg Gr(k,n) = \frac{1!2!\dots k![(k+1)(n-k)]!}{(n-k)!(n-k+1)!\dots n!}$$