Esercizi di geometria algebrica, 19.12.00

1. Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 | y = e^x\}$. Si immerga $\mathbb{C}^2$ in $\mathbb{P}^2$ aggiungendo "la retta all'infinito" e si trovi la piú piccola sottovarietá analitica di $\mathbb{P}^2$ che contiene C.

2. Supponiamo noto che $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}) = 0$. Provare che

$$H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(t)) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Suggerimento: Utilizzare la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(t-1) \longrightarrow \mathcal{O}(t) \longrightarrow \mathcal{O}(t)_{|\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0$$

Analogamente provare che $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(t)) = 0$ $\forall t \in \mathbb{Z}$ e $\forall i : 0 < i < n$.

3. Sia $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{P}^2$ data da $f(x_0, x_1) = (x_0^2, x_0x_1, x_1^2)$ e sia $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{g} \mathbb{P}^2$ data da $g(x_0, x_1) = (x_0, x_1, 0)$ Provare che $f^*T\mathbb{P}^2 = \mathcal{O}(3) \oplus \mathcal{O}(3)$ e che $g^*T\mathbb{P}^2 = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(2)$. *Suggerimento:* Si puó usare il teorema di Segre-Grothendieck, per cui ogni 2-fibrato su $\mathbb{P}^1$ ha la forma $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ per qualche $a, b \in \mathbb{Z}$.

4. *Funzioni simmetriche elementari* Le funzioni simmetriche elementari $\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ sono definite dall'identitá $\prod_{i=1}^n (x - x_i) = \sum_{i=0}^n x^i (-1)^{n-i} \sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ Ad esempio $\sigma_0 = \prod_{i=1}^n x_i$, $\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^n x_i$. Provare che se f é un polinomio simmetrico in $x_1, \ldots, x_n$ allora esiste un polinomio g tale che $f(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1})$ (vedi [CLO] cap.7).

5. Sia $f \colon M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ continua tale che

$$f(g^{-1}Ag) = f(A)$$

$\forall g \in GL(n)$. Provare che esiste $s(x_1, \ldots, x_n)$ simmetrica continua tale che se $\lambda_i(A)$ sono gli autovalori di A allora $f(A) = s(\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$. *Suggerimento:* Le matrici diagonalizzabili sono dense.

6. Sia T il nucleo di una applicazione suriettiva su $\mathbb{P}^2$

$$\mathcal{O}^4 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^2$$

a) Provare che $H^0(T) = 0$
b) Provare che esiste una retta L tale che $H^0(T|L) \neq 0$
c) Si determini $\{L \in \mathbb{P}^{2*} | H^0(T|L) \neq 0\}$, che si chiama la sottovarietá delle rette di salto.
d) Calcolare $\chi(T(n))$ e $\chi(\wedge^2 T(n))$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$