Esercizi di geometria algebrica, 22.11.00

1. Consideriamo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$. La successione di Eulero induce una applicazione naturale $End(V) \xrightarrow{f} H^0(T\mathbb{P}^2)$. Calcolare il luogo degli zeri di $f(id)$. Fissata una base di V, sia $A \in End(V)$ rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcolare il luogo degli zeri di $f(A)$.

2. Provare che il fibrato tangente di $Gr(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^n)$ é isomorfo a $Hom(U, Q)$.

3. (Immersione di Segre) Siano V e W spazi vettoriali. Provare che la sottovarietá di $\mathbb{P}(Hom(V, W))$ data dai morfismi di rango 1 é nonsingolare (sugg: usare l'azione di in conveniente gruppo) ed é isomorfa a $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W)$. L'immersione

$$\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(Hom(V, W))$$

puó essere vista in coordinate come

$$(x_0, \ldots x_n), (y_0, \ldots, y_m) \to (x_0 y_0, x_0 y_1 \ldots, x_n y_m)$$

4. Siano (x_0, x_1) coordinate omogenee su $\mathbb{P}^1$ e (y_0, y_1, y_2) coordinate omogenee su $\mathbb{P}^2$. Provare che la varietá W in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ (vedi esercizio precedente) data dalla equazione

$$x_0 y_1 - x_1 y_0 = 0$$

é contenuta in un iperpiano $\mathbb{P}^4$ ed identificarla con l'immagine dell'applicazione razionale definita sul piano proiettivo dal sistema lineare delle coniche passanti per un punto.