Esercizi di geometria algebrica, 8.11.00

1. Sia X la conica $\{x_0x_2 - x_1^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$.
a) Provare che X é nonsingolare.
b) Sia $g \in \mathcal{M}(X)$ la restrizione di $\frac{x_2}{x_1}$, sia $h \in \mathcal{M}(X)$ la restrizione di $\frac{x_2}{x_1+x_0}$. Si calcolino i divisori in $Div(X)$: (g), (h), (gh).
c) Sia $P = (0,0,1)$, calcolare $h^0(nP) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.
d) Provare che $P \sim Q \quad \forall P, Q \in X$.

2. Sia $X = \{x_0^3 + x_1^3 - +x_2^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ la cubica di Fermat.
a) Provare che X ' nonsingolare.
b) E' noto (Eulero) che i suoi unici punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q})$ sono $P = (1,-1,0)$, $Q = (1,0,-1)$, $R = (0,1,-1)$. Sia $g \in \mathcal{M}(X)$ la restrizione di $\frac{x_0}{x_1}$, sia $h \in \mathcal{M}(X)$ la restrizione di $\frac{x_0^3+x_1^3}{x_2^3}$. Si calcolino i divisori in $Div(X)$: (g), (h), (gh).
c) Trovare le coordinate di $S \in X$ tale che $P+Q \sim R+S$. Sia $Z = (-1, \omega, 0)$, dove $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, trovare le coordinate di $S \in X$ tale che $P + Z \sim R + S$.
d) Calcolare $h^0(nP) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

3. Sia D un divisore su X superficie di Riemann compatta. Provare che $H^0(D-P) \subset H^0(D)$ ha codimensione 0 oppure 1. Trovare esempi di divisori positivi dove la codimensione vale 0 oppure 1.

4. Sia X una superficie di Riemann compatta e sia $P \in X$ tale che $h^0(P) = 2$. Provare che $X \simeq \mathbb{P}^1$. *Suggerimento: si costruisca $f: X \to \mathbb{P}^1$ suriettiva. Un punto $y \in \mathbb{P}^1$ si dice semplice se $f^{-1}(y)$ é costituito da un solo punto x e se esistono coordinate locali z in un intorno di x e z' in un intorno di y tale che localmente $z' = f(z) = z$. Provare che l'insieme dei punti semplici é aperto, chiuso e non vuoto.*

5. Sia $S(F) \xrightarrow{\pi} X$ lo spazio associato al fascio F su X. Stabilire un isomorfismo naturale tra $F(U)$ e il gruppo delle applicazioni continue $s: U \to S(F)$ tali che $\pi \cdot s = 1_U$.