Esercizi di geometria algebrica, 31.10.00

1. Sia $\tau \in \mathbb{C}$ con $Im\ \tau > 0$. Definiamo

$$\theta(z) := \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i(n^2 \tau z + 2nz)}$$

per $z \in \mathbb{C}$. Provare che θ é una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$. Provare che gli unici zeri di θ sono semplici e sono situati nei punti $\frac{1+\tau}{2} + m + n\tau$ al variare di $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Siano f, g due funzioni meromorfe su X superficie di Riemann compatta. Provare che esiste un polinomio $F(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tale che $F(f, g) = 0$. Dedurre che il campo delle funzioni meromorfe ha grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$. *Suggerimento: sia* $(f) = P_1 - N_1$ *e* $(g) = P_2 - N_2$. *Sia* $D = N_1 + N_2$. *Allora* $f, g \in H^0(D)$ *e* $f^i g^j \in H^0(nD)$ *se* $i + j \leq n$. *Siccome* $h^0(nD) \leq n\ deg(D) + 1 \ldots$

3. Provare che se D é un divisore di grado positivo sul toro $\mathbb{C}/\Lambda$ allora $h^0(D) = degD$.