Esercizi per il corso di Geometria Algebrica

18.10.2000

Risultati introduttivi

Esercizio 1. (Gruppi di omologia singolare) Calcolare $H_i(A, \mathbb{Z})$ nei casi

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$A = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = (2 + \cos a) \cos b, y = \sin a, z = (2 + \cos a) \sin b, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 2. (Azioni di gruppi) Un gruppo G agisce su una varietá X se é dato un morfismo di gruppi da G a $Aut(X)$ dove $Aut(X)$ é il gruppo degli automorfismi che , a seconda della struttura, possono essere C^∞, olomorfi... Se G é un gruppo di Lie (cioé é esso stesso una varietá dove il prodotto $G \times G \to G$ e l'inversa $G \to G$ sono C^∞, olomorfi...) si chiede in piú che l'applicazione naturale $G \times X \to X$ sia C^∞, olomorfa... Provare che se $p \in X$ é un punto fisso dell'azione allora viene indotta un'azione di G sullo spazio tangente T_pX che soddisfa alle proprietá

$$g \cdot (v + w) = g \cdot v + g \cdot w, \forall v, w \in T_pX$$

$$g \cdot (cv) = cg \cdot v, \forall v \in T_pX, c \in \mathbb{R} (c \in \mathbb{C} \text{ nel caso olomorfo})$$

Un'azione di G su uno spazio vettoriale V che soddisfa le due proprietá precedenti si dice una rappresentazione e corrisponde ad un morfismo $G \to GL(V)$.

Esercizio 3. (Integrazione di forme reali) Sia γ il bordo del quadrato $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x, y \leq 1\}$ percorso in senso antiorario. Calcolare l'integrale su γ delle seguenti forme

$$dx + dy$$

$$xdx + dy$$

$$ydx + dy$$

$$ydx - dy$$

Quali delle forme sono chiuse? Quali esatte?

Esercizio 4. (Integrazione di forme complesse) Sia γ la circonferenza costituita dai numeri complessi di modulo unitario, percorsa in senso antiorario. Calcolare l'integrale su γ delle seguenti forme

$$dz + d\overline{z}$$

$$zdz + d\overline{z}$$

$$\overline{z}dz + d\overline{z}$$

Quali delle forme sono chiuse? Quali esatte?

Esercizio 5. (Residui e zeri) Calcolare per $z = 1$ $ord(f)$ e $Res(f)$ nei casi $f(z) = \frac{1}{z^3-1}$ e $f(z) = \frac{1}{(z^3-1)^4}$

Esercizio 6. Provare che la sfera S^2 ha una struttura di varietá complessa isomorfa a $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Esercizio 7. Costruire una funzione olomorfa su $\mathbb{C}^*$ che non puó essere estesa ad una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$.

Esercizio 8. Siano (x_0, x_1) coordinate omogenee su $\mathbb{P}^1$. Provare che una funzione meromorfa su $\mathbb{P}^1$ si puó sempre scrivere nella forma $\frac{p(x_0,x_1)}{q(x_0,x_1)}$ dove p, q sono polinomi omogenei dello stesso grado.

Esercizio 9. Sia X una superficie di Riemann. Provare che ogni funzione meromorfa su X puó essere identificata con una funzione olomorfa da X a $\mathbb{P}^1$.

Esercizio 10. (Preludio ai fasci) Sia $\mathcal{O}(U)$ la $\mathbb{C}$-algebra delle funzioni olomorfe su un aperto U. Provare che se $U \subset V$ allora la restrizione $\rho_{UV}: \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ é un morfismo di algebre e che $\rho_{WU} \cdot \rho_{UV} = \rho_{WV}$

Esercizio 11. (Formula di Eulero) Provare che se $f(x_1, \ldots, x_n)$ é un polinomio omogeneo di grado d allora $df = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Esercizio 12. (Il birapporto) Siano P_i per $i = 1, \ldots, 4$ quattro punti distinti di $\mathbb{P}^1$ espressi in coordinate affini dai valori t_i. Il valore $\frac{(t_1-t_3)(t_2-t_4)}{(t_2-t_3)(t_1-t_4)}$ si dice *birapporto* dei quattro punti e si indica con l'espressione $(P_1P_2P_3P_4)$. Sia ora Q_i per $i = 1, \ldots, 4$ un'altra quaterna di punti distinti. Provare che esiste una proiettivitá f su $\mathbb{P}^1$ tale che $f(P_i) = Q_i$ se e solo se $(P_1P_2P_3P_4) = (Q_1Q_2Q_3Q_4)$.

Esercizio 13.

i)Provare che se $(P_1P_2P_3P_4) = y$ allora riordinando i quattro punti, il birapporto puó assumere soltanto i valori $\{y, \frac{1}{y}, 1-y, \frac{1}{(1-y)}, \frac{(y-1)}{y}, \frac{y}{(y-1)}\}$ Dedurre che esiste un sottogruppo di ordine 4 del gruppo simmetrico S_4 che lascia invariato il birapporto. Sia $j(x) = \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}$

ii)Provare che $j(x) = j(y)$ se e solo se $x \in \{y, \frac{1}{y}, 1-y, \frac{1}{(1-y)}, \frac{(y-1)}{y}, \frac{y}{(y-1)}\}$

iii)Date due quaterne di punti distinti $(P_1P_2P_3P_4)$ e $(Q_1Q_2Q_3Q_4)$ provare che esiste una proiettivitá f su $\mathbb{P}^1$ tale che $f(\{P_1, P_2, P_3, P_4\}) = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\}$ se e solo se $j(P_1P_2P_3P_4) = j(Q_1Q_2Q_3Q_4)$.

Esercizio 14. Provare che il birapporto tra quattro punti di $\mathbb{C}$ é reale se e solo se i quattro punti appartengono ad una circonferenza.

Esercizio 15. (Curve piane) Trovare i punti singolari delle seguenti curve e delle loro chiusure proiettive

$$y^2 = x^3$$

$$y^2 = x^3 + 1$$

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 0$$