Esercizi su Grassmanniane e funzioni simmetriche

1) Sia $V = C^0(\mathbf{R}^3)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue in tre variabili. V contiene il sottospazio S delle funzioni simmetriche e il sottospazio A delle funzioni alternanti. Sia C il sottospazio delle funzioni cicliche definito nel modo seguente

$$C := \{f \in V | f(x_1, x_2, x_3) + f(x_3, x_1, x_2) + f(x_2, x_3, x_1)\}$$

.

a) provare che $V = S \oplus A \oplus C$

b) considerare l'azione naturale del gruppo simmetrico Σ_3 delle permutazioni su tre elementi su V e provare che S, A, C sono tre sottospazi invarianti.

c) si possono ripetere i punti a) e b) per i polinomi a coefficienti in un campo K di caratteristica diversa da 2 e 3 ?

2) Siano p_{ij} coordinate plückeriane per la grassmanniana G delle rette in $\mathbf{P}^3$

a) trovare le equazioni in G delle rette che passano per il punto (x_0, x_1, x_2, x_3).

b) descrivere il luogo dei punti in $\mathbf{P}^3$ corrispondenti a $(p_{01}, \ldots p_{23})$.

c) trovare le equazioni in G delle rette contenute nell'iperpiano

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

3) Provare che ogni quadrica liscia in $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$ é isomorfa a $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P^1}$, in particolare contiene due famiglie di rette.

a) descrivere le curve in G definite dalle due famiglie, come si puó risalire dall'una all'altra?

b) descrivere la curva in G definita dalle rette in un cono quadrico. Come si differenzia dalle curve del punto a) ?

4) Sia C una curva in P^3 di grado d e genere g. Calcolare il grado della superficie $Tan(C)$ descritta dalle rette tangenti a C, e mostrare che coincide con il grado della curva corrispondente in G. *(Suggerimento: usare la formula di Riemann-Hurwitz)*

5) Sia C una curva in P^3 di grado d e genere g. Le rette secanti a C descrivono una superficie in G. Calcolare il bigrado di questa superficie *(Suggerimento: usare che una curva piana di grado d e genere g ha $\binom{d-1}{2} - g$ nodi , nell'ipotesi che le sue singolaritá siano soltanto nodi).*

6) Sia S una superficie cubica liscia in $\mathbf{P}^3$. Provare che corrisponde ad una sezione del fibrato S^3U^* su G.

Calcolare che $c_4(S^3U^*) = 27$ e dedurre che S contiene 27 rette sotto l'ipotesi (non necessaria) che S contenga un numero finito di rette.

7) Descrivere le orbite per l'azione sinistra di $GL(k+1)$ sull'aperto delle matrici di rango massimo $(k+1) \times (n+1)$ mediante dei loro rappresentanti a scala. Lo spazio quoziente é isomorfo alla grassmanniana dei $\mathbf{P}^k$ in $\mathbf{P}^n$. Le orbite con rappresentante a scala della stessa forma parametrizzano una cella di Schubert.

8) Sia $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$. Esprimere f

a) come polinomio negli E_i polinomi simmetrici elementari

b) come polinomio negli H_i polinomi simmetrici completi

c) come combinazione lineare delle funzioni di Schur.