Prova scritta di Geometria 2 (Nuovo Corso di Laurea)
A.A. 2001-2002, 31/5/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $\pi = \{(x, y, z) |\, x + y = 1\}$ e $s = \{(5t, t, 1) |\, t \in \mathbf{R}\}$.
Trovare un'espressione parametrica e cartesiana della retta r parallela al piano π, tale che $r \cap s = s \cap \pi$ e perpendicolare alla retta s.

Esercizio 2. Siano $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$, $D = [1 : 2 : 1]$, $E = [0 : 1 : 1]$, $F = [0 : 1 : -1]$, $G = [1 : 1 : 1]$ punti di $\mathbf{P}^2$.
a) Trovare una proiettività $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = F$, $f(D) = G$. Tale proiettività è unica? (Motivare la risposta).
b) Trovare il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^2$ contenente B ,C, E, F e il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^2$ contenente B ,C, D E, F.
c) Trovare, se esiste, un'applicazione proiettiva g (definita su un sottoinsieme di $\mathbf{P}^2$ contente A, B, C, D) tale che $g(A) = g(B) = g(C) = g(D) = A$ e dire in tale caso su quale sottoinsieme di $\mathbf{P}^2$ è definita e se è unica.

Esercizio 3. a) Calcolare la segnatura della forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare, al variare del parametro h, la segnatura della forma bilineare $b_h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $S = \{(x, y) |\, x \geq 0\}$.
a) Trovare tutte le affinità f tale che $f(S) \subseteq S$ (motivare la risposta).
b) Trovare tutte le isometrie f tale che $f(S) \subseteq S$ (motivare la risposta).

Prova scritta di Geometria 1 (Nuovo Corso di Laurea)
A.A. 2001-2002, 31/5/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. a) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica e dire se A è diagonalizzabile.
b) Trovare un'espressione cartesiana di $Im(A)$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x + y, z, z)$$

i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
ii) Si determini una base di di $ker(f)$.
iii) Determinare una base di $ker(f) \cap U$ dove $U = \{(x, y, z, w) |\ x + y + z = 0\}$ e una base di $ker(f) + U$.
iv) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $(g \circ f)(e_1) = e_2$ e $\dim \ker g = 2$.

Esercizio 3.
a) Dire se esiste un'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ lineare tale che

$$ker(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0\}$$

b) Dire se esiste un'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ lineare tale che

$$ker(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$$

c) Dire se esiste un'applicazione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ lineare tale che

$$ker(f) = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x = 0,\ y = 0\}$$

e, in caso di risposta affermativa, dire come sono fatte le matrici che esprimono nella base canonica le applicazioni di tale tipo.

Esercizio 4. Una matrice quadrata A si dice nilpotente se esiste un intero k positivo tale che $A^k = 0$.
a) Dimostrate che una matrice nilpotente ha determinante nullo.
b) Fate un esempio di una matrice con determinante nullo ma non nilpotente.
c) Dimostrate con un esempio che le matrici nilpotenti $n \times n$ non formano un sottospazio vettoriale di $M(n \times n, \mathbf{R})$ (per esempio $n = 2$).
d) Dite per quali valori del parametro reale h la seguente matrice è nilpotente:

$$\begin{pmatrix} h & h-2 & 0 \\ 0 & h(h-2) & h-2 \\ 0 & 0 & h \end{pmatrix}$$

Prova scritta di Geometria 1 e 2 (Nuovo Corso di Laurea)
A.A. 2001-2002, 31/5/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
Trovare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare
$$f(x, y, z, w) = (x + y, x + y, z, z)$$
i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
ii)Si calcoli una base di $Im(f)$ e si determini la dimensione di $Im(f) \cap ker(f)$.
iii) Determinare una base di $ker(f) \cap U$ dove $U = \{(x, y, z, w) | \, x+y+z = 0\}$. e una base di $ker(f) + U$.
iv) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $(g \circ f)(e_1) = e_2$ e $\dim \ker g = 2$.

Esercizio 3. Siano $A = [1 : 0 : 0]$, $B = [0 : 1 : 0]$, $C = [0 : 0 : 1]$, $D = [1 : 2 : 1]$, $E = [0 : 1 : 1]$, $F = [0 : 1 : -1]$, $G = [1 : 1 : 1]$ punti di $\mathbf{P}^2$.
a) Trovare una proiettività $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(C) = F$, $f(D) = G$. Tale proiettività è unica? (Motivare la risposta).
b) Trovare il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^2$ contenente B ,C, E, F e il più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^2$ contenente B ,C, D E, F.
c) Trovare, se esiste, un'applicazione proiettiva g (definita su un sottoinsieme di $\mathbf{P}^2$ contente A, B, C, D) tale che $g(A) = g(B) = g(C) = g(D) = A$ e dire in tale caso su quale sottoinsieme di $\mathbf{P}^2$ è definita e se è unica.

Esercizio 4. a) Calcolare la segnatura della forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
b) Calcolare, al variare del parametro h, la segnatura della forma bilineare $b_h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice
$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

Prova scritta di Geometria 1
Vecchio Ordinamento, 31/5/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. a) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare gli autovalori di A e la loro molteplicità algebrica e geometrica e dire se A è diagonalizzabile.
b) A è nilpotente? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x + y, z, z)$$

i) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
ii) Si determini una base di di $Im(f)$.
iii) Determinare una base di $ker(f) \cap U$ dove $U = \{(x, y, z, w) | \, x + y + z = 0\}$ e una base di $ker(f) + U$.
iv) Si determini un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $(g \circ f)(e_1) = e_2$ e $\dim \ker g = 2$.

Esercizio 3. a) Calcolare la segnatura della forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcolare, al variare del parametro h, la segnatura della forma bilineare $b_h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & h \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia $\pi = \{(x, y, z) | \, x + y = 1\}$ e $s = \{(5t, t, 1) | \, t \in \mathbf{R}\}$.
Trovare un'espressione parametrica e cartesiana della retta r parallela al piano π, tale che $r \cap s = s \cap \pi$ e perpendicolare alla retta s.