28 SETTEMBRE 1999

COMPITO DI GEOMETRIA 1

LAUREA E DIPLOMA IN MATEMATICA – A.A.1998/99

Esercizio 1 Sia $f : A \to A'$ una applicazione tra due spazi affini reali tale che $f(\sum_{i=0}^{1} a_i P_i) = \sum_{i=0}^{1} a_i f(P_i)$ $\forall P_0, P_1 \in A$ e $\forall a_0, a_1 \in \mathbf{R}$ tali che $\sum_{i=0}^{1} a_i = 1$

a) Provare che se P, Q, R sono punti allineati di A allora $f(P)$, $f(Q)$, $f(R)$ sono allineati.

b) Provare che $f(\sum_{i=0}^{2} a_i P_i) = \sum_{i=0}^{2} a_i f(P_i)$ $\forall P_0, P_1, P_2 \in A$ e $\forall a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ tali che $\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$.

Esercizio 2 Sia $V := \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^5 | x_1 + x_5 = 0\}$

a) Verificare che e_2, e_3, $e_3 + e_4$ sono vettori linearmente indipendenti di V e completarli ad una base di V.

b) Scrivere le coordinate di $[0, 1, 2, 3, 0]$ rispetto alla base trovata al punto i).

c) Se W é un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^5$ tale che dim $W = 2$ provare che $V \cap W$ contiene un vettore non nullo.

Esercizio 3 Studiare al variare di $h, k \in bfR$ il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 + kx_2 + kx_4 &= k \\ x_2 - x_3 + hx_4 &= 0 \end{cases}$$

Esercizio 4 In $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare $<,>$, si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dato da $\phi(\mathbf{x}) :=< \mathbf{x}, \mathbf{u} > \mathbf{v}+ < \mathbf{x}, \mathbf{v} > \mathbf{u} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$, dove $\wedge$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$ e u, v sono due vettori di lunghezza 1 tra loro ortogonali.

a) Trovare gli autovalori ed i relativi autospazi di ϕ.

b) Determinare, se esiste, una base di autovettori per ϕ.

c) Dire se ϕ è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare $<,>$.

(Suggerimento: Si scelga un'opportuna base ortonormale ...)