Scritto di Geometria 1, a.a. 2003-2004, 28 maggio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

MOTIVARE LE RISPOSTE

**Esercizio 1.** Siano

$$V = \{(x, y, z, w) \mid x + z = y + w = 0\}$$

$$W = \{(t, t + s, t + s, t) \mid t, s \in \mathbf{R}\}$$

1) Trovare una base di $V \cap W$ e una base di $V + W$.
Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\mathcal{E}$ è la base canonica.
2) Trovare $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ dove $\mathcal{B} = \{e_1 + e_2, e_1, e_3, e_4\}$
3) Trovare base di $f(V) \cap f(W)$ e base di $f(V \cap W)$
4) Esiste $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $g(V \cap W) \neq g(V) \cap g(W)$? (motivare accuratamente la risposta).

**Esercizio 2.** 1) Dire per quali valori di $a$ e $b$ la seguente matrice è diagonalizzabile

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & a & 0 \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$$

2) Trovare $Q$ ortogonale tale che $Q^{-1}M_{0,3}Q$ sia diagonale.

**Esercizio 3.** 1) Calcolare il rango al variare dei parametri

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & ca \\ a & a+b & c \\ a & b & b+c \end{pmatrix}$$

2) Dire se $\{A_{0,b,c} \mid b, c \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale delle matrici $3 \times 3$ ed eventualmente dire che dimensione ha e trovare una base.
3) Dire se

$$\{v \in \mathbf{R}^3 \mid \exists a, b \in \mathbf{R} \text{ } \textit{tali che } v \textit{ è comb. lin. delle colonne di } A_{a,b,0}\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ ed eventualmente dire di che dimensione.

Scritto di Geometria 2, a.a. 2003-2004, 28 maggio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

MOTIVARE LE RISPOSTE

**Esercizio 1.** In $A^3$ siano

$$r = \{(1+t,t,t)|\ \ t \in \mathbf{R}\}$$

$$s = \{(x,y,z)|\ x = 2\ \ y = 1\}$$

$$q = \{(t,2t,t)\ t \in \mathbf{R}\}$$

i) Trovare un'espressione cartesiana di $q$ e un'espressione parametrica di $s$.
ii) Trovare se esiste un piano contenente $r$ e $s$ (un'espressione parametrica e una cartesiana).
iii) Trovare se esiste una retta parallela a $s$ avente intersezione non vuota con $r$ e $q$.

**Esercizio 2.** 1) Trovare se esiste una proiettività $f$ di $\mathbf{P}^2$ tale che
$f([1:0:0]) = [1:0:0]$,
$f([0:1:0]) = [0:0:1]$,
$f([1:0:1]) = [1:1:1]$,
$f([0:1:1]) = [0:1:0]$,
e dire eventualmente se è unica.
2) Trovare se esiste una proiettività $f$ di $\mathbf{P}^2$ diversa dall'identità e tale che abbia $[1:0:0]$ come punto fisso e $f^3 = I$.
3) Sia $r = \{[x_0 : x_1 : x_2]|\ x_1 = 0\}$. Trovare tutte le proiettività $f$ di $\mathbf{P}^2$ tali che $f(r) = r$ e $f(A) = A$ dove $A$ è la "parte affine" $\{x_0 \neq 0\}$.

**Esercizio 3.** Sia $S = \{(-1,0),(0,0),(1,0),(-1,1),(0,1),(1,1)\}$.
a) Trovare tutte le isometrie $f$ del piano tali che $f(S) \subset S$.
b) Trovare tutte le affinità $f$ del piano tali che $f(S) \subset S$.