

**Geometria 1, corso di laurea in Matematica**  
**Scritto, 27 gennaio 2010, A.A. 2008-2009**

NOME E COGNOME:

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTO FOGLIO:

1) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO)

Siano  $x, y \in \mathbf{R}$  e sia  $A_{x,y} = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 & 0 \\ x & y & x & 0 & 0 \\ x & y & x & y & 0 \\ x & y & x & y & x \end{pmatrix}$ . Discutere il rango e il determinante al variare di  $x$  e  $y$ .

Per  $x, y \neq 0$ , trovare  $v \in \mathbf{R}^5$  (eventualmente dipendente da  $x$  e  $y$ ) tale che  $A_{x,y}v = e_2$ .

2) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$  e sia  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  una sua base. Sia  $S = \{f \in \text{Hom}(V, V) \mid f(\langle v_1, v_2 \rangle) \subset \langle v_3 \rangle\}$ . Dire se  $S$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(V, V)$  e, se sì, calcolarne la dimensione, se no trovare un controesempio alla chiusura per la somma o alla chiusura per la moltiplicazione per scalari.

3) (MOTIVARE LA RISPOSTA)

Dire se è vero che

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$$

$\forall A, B \in M(n \times n, \mathbf{R})$  tali che  $A+B \in GL(n)$



NOME E COGNOME

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTA PAGINA:

4) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO)

Sia  $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma quadratica definita da

$$q(x, y, z, t) = xy + y^2 - 4xz + z^2 - xt + 2zt.$$

Calcolare il rango e la segnatura  $q$ .

rango  $q =$

segnatura  $q =$

5) (SCRIVERE IL PROCEDIMENTO, MOTIVARE LE RISPOSTE)

Nello spazio affine  $\mathbb{A}^3$  sia  $r$  la retta di equazioni cartesiane

$$r : -x + 2y + z = y + 1 = 0$$

e  $s$  la retta di equazioni parametriche

$$s : \begin{cases} x &= t + 1 \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases}$$

- Discutere la posizione reciproca delle due rette (incidenti, parallele, sghembe).
- Calcolare la distanza tra le due rette.
- Dire se esiste una retta che incontra le rette  $r$  ed  $s$  formando con entrambe un angolo di  $\pi/4$ . In caso positivo trovarne le equazioni (cartesiane o parametriche) e stabilire se tale retta è unica oppure no.

