Scritto di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 26/9/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $g : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\dim Im(g) = \dim Im(g^2)$.

i) Dimostrare che $Ker(g) \cap Im(g) = \{0\}$.

ii) Dimostrare che $Ker(g) \oplus Im(g) = V$.

Esercizio 2. Sia f_t l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^3$ associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ l'applicazione f_t é suriettiva (risp. iniettiva)?

ii) Per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ $(0,1,1,0) \in Ker\ f_t$?

iii) Per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ $(0,1,1) \in Im\ f_t$?

Esercizio 3. Nello spazio euclideo con riferimento ortogonale $Oxyz$ si considerino le rette $r: x = y - 1 = 0$ e $s: x - 5 = y = 0$.

i) calcolare la loro distanza

ii) trovare se esiste un piano che le contiene entrambe

iii) trovare se esiste una retta che le incontra entrambe con un angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

iv) detti P e Q i punti in cui il piano $x + y + z = 1$ incontra le due rette, calcolare l'area del triangolo di vertici O, P, Q.

Esercizio 4. Sia $b : M(2 \times 2, \mathbf{R}) \times M(2 \times 2, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ la forma bilineare così definita:

$$b(A, B) = ({}^t AB)_{11}$$

Dimostare che b è bilineare simmetrica e calcolare la segnatura.