26 Settembre 2000

Scritto di Geometria 1

Laurea e Diploma in Matematica – A.A.1999/2000

Esercizio 1. Si calcoli una base di soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} bx + ay + az &= 0 \\ ax + by + az &= 0 \\ ax + ay + bz &= 0 \end{cases}$$

al variare dei parametri reali a, b.

Esercizio 2. In $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, si considerino i punti $A = (1, -2, 2)$, $B = (2, 3, 4)$, $Q = (1, 1, 1)$, il piano $\pi: \; 3x - y + z + 3 = 0$, sia inoltre r la retta passante per A e per B.

a) Determinare l'equazione cartesiana del piano (se esiste) passante per r e parallelo a π e quella del piano passante per r ed ortogonale a π.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta passante per Q che é ortogonale e incidente a r.

Esercizio 3.

Sia T l'operatore lineare su $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, la cui matrice rispetto alla base standard é

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) T é una isometria? (*Motivare la risposta*)

b) Calcolare una base ortonormale di autovettori di T

c) Calcolare $T^{100}(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 1, 0)$ e $T^{100}(1, 0, 0)$.

Esercizio 4. In $\mathbf{R}^2$, munito del prodotto scalare canonico, si considerino le coniche C_t: $tx^2 + ty^2 + 2x - 2y = 0$, dove t è un parametro reale.

a) Dare la classificazione affine reale di tutte le C_t.

b) Determinare il luogo descritto dai centri delle C_t.

c) Nel caso $t = 1$ si trovi una trasformazione isometrica che muta la C nella sua forma canonica.