Scritto di Geometria 1, a.a. 2003-2004, 26 gennaio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(x, y, z) = (2x - y + z, y + z, y + z)$$

i) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e sia $\mathcal{B}$ la base $\{e_1, e_2 + e_1, e_3 + e_1\}$. Trovare $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ e $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
ii) Trovare una base di $Ker(f)$, una base di $Im(f)$ e un'espressione cartesiana di $Im(f)$.
iii) Dire se f è diagonalizzabile ed eventualmente trovare una base di $\mathbf{R}^3$ composta da autovettori di f.
iv) Esistono due basi $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$ di $\mathbf{R}^3$ tali che $M_{\mathcal{A},\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Motivare la risposta.

Esercizio 2. Siano a, b due numeri reali e n un numero naturale ≥ 1. Sia $M_{a,b}$ la matrice $2n \times 2n$ "a scacchiera" con coefficienti a e b, precisamente
$(M_{a,b})_{i,j} = a$ se $i + j$ è pari
$(M_{a,b})_{i,j} = b$ se $i + j$ è dispari.
i) Calcolare il rango e il determinante di $M_{a,b}$ al variare dei parametri a, b e n.
ii) Calcolare il determinante di $M_{a,b}^2 + M_{a,b}$ al variare dei parametri a, b e n.
iii) Trovare una base di $Im(f_{M_{a,b}}) \cap \{(x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} | \quad x_1 + x_2 = 0\}$ al variare dei parametri a, b e n.
iv) Se a e b non sono entrambi nulli, trovare un autovalore non nullo di $M_{a,b}$ al variare dei parametri a, b e n.

Esercizio 3. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali (motivare le risposte). In caso affermativo calcolarne la dimensione.
a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + 3y = 1\}$
b) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + 3y = 0\}$
c) $\{P \in \mathbf{R}_2[x] | P(0)^2 = P(0)\}$
d) $\{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) | {}^t({}^te_1 A) = Ae_1\}$
e) $\{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) | \ A \ ha \ 3 \ come \ autovalore\}$

Scritto di Geometria 2, a.a. 2003-2004, 26 gennaio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Nello spazio euclideo, con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri la retta $r = \{(1, 2+t, 0)\ t \in \mathbf{R}\}$.
i) Trovare un'espressione cartesiana del piano contenente la retta r e parallelo a

$$\{(2s, 0, 2s)\ \ s \in \mathbf{R}\}$$

ii) Discutere al variare del parametro a la posizione reciproca di r e

$$s_a := \{(x, y, z)|\ x + y = a\ \ z = a\}$$

iii) Descrivere con equazioni e disequazioni l'inviluppo convesso di $P = (0, 1, 1)$ e del segmento

$$\{(1, 2+t, 0)\ t \in [0, 1]\}$$

Esercizio 2.
Sia data nel piano euclideo, con riferimento cartesiano ortogonale Oxy, la conica C di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ e si consideri il punto $P_t = (t, 1)$ al variare del parametro reale $t \in \mathbf{R}$.
i) Se P_t è esterno a C, esistono esattamente due punti $A_t, B_t \in C$ in cui una retta per P_t è tangente a C. Dare le condizioni su t affinché questo accada.
ii) Trovare, se esiste, un punto P_t con $t > 0$ tale che l'area del triangolo $A_tB_tP_t$ é uguale all'area interna a C.
iii) Con le condizioni trovate in i), dare l'equazione cartesiana della retta r_t passante per A_t e B_t e trovare, se esiste, un punto Q comune a tutte le rette r_t.

Esercizio 3.
L'ottaedro é il solido regolare con 8 facce che sono triangoli equilateri.
Sia a la lunghezza di uno spigolo di un ottaedro S.
Calcolare in funzione di a:
i) la superficie totale ed il volume di S.
ii) il raggio della sfera inscritta e circoscritta a S.
iii) l'angolo tra due facce adiacenti di S.
iv) se f è una similitudine con fattore di scala 3, ripetere i punti i), ii), iii) per l'ottaedro $f(S)$.