

Geometria 1, Corso di laurea in Matematica
Scritto, 24 febbraio 2009, A.A. 2008-2009

1) (DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO)

Sia $A_{x,y,z} = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$

a) Calcolare il determinante e il rango di $A_{x,y,z}$ al variare di x , y e z .

b) Dire per quali valori di x , y e z $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio generato dalle colonne di $A_{x,y,z}$.

c) Dire se $S = \{A_{x,y,z}e_1 + A_{x,y,z}e_3 \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^4 ed eventualmente calcolarne una base e trovarne un'espressione cartesiana.

d) Trovare $M_{\mathcal{A},\mathcal{P}}(f_{A_{x,y,z}})$ dove $\mathcal{A} = \{e_1 - e_2, e_1, e_3, e_4 - e_3\}$ e $\mathcal{P} = \{e_3, e_4 - e_3, e_1 - e_2, e_1\}$.

e) Sia $U = \{B \in M(4 \times 4, \mathbf{R}) \mid BA_{1,1,1} = A_{1,1,1}B\}$

Dire se U è un sottospazio vettoriale. Inoltre se lo è indicare una sua base, se non lo è dare un controesempio alla chiusura per la somma o alla chiusura per la moltiplicazione per scalari.

2) (MOTIVARE LE RISPOSTE, SCRIVERE IL PROCEDIMENTO) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbf{R} di dimensione 3. Siano H_1 e H_2 due sottospazi vettoriali distinti in V di dimensione 2. Calcolare la dimensione di

$$S = \{f \in \text{Hom}(V, V) \mid f(H_i) \subset H_i \ i = 1, 2\}$$