# Scritto di Geometria II, 23 Maggio 2003
# C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

**Esercizio 1.** Sia $C$ la conica nel piano euclideo di equazione

$$x^2 + 4xy + 13y^2 - 100 = 0$$

(a) Si trovi un'affinità $f$ tale che $f(C)$ abbia equazione

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

(b) Calcolare l'area della regione

$$A = \{(x, y) | x^2 + 4xy + 13y^2 - 100 \leq 0\}$$

*Suggerimento: usare il punto (a)*

(c) Siano $P_1, P_2, P_3, P_4$ i punti in cui $C$ incontra gli assi coordinati. Trovare tutte le coniche passanti per $P_1, P_2, P_3, P_4$ e per l'origine.

**Esercizio 2.** Siano $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$, $D = (10, 0)$, $E = (0, 10)$ punti nel piano euclideo.
(a) Sia $f$ una similitudine tale che $f(A) = B$ e $f(B) = C$. Calcolare la lunghezza del segmento $f(D)f(E)$.
*Suggerimento: non è necessario trovare le equazioni di f*

(b) Si trovino tutte le similitudini $f$ del piano tali che $f(B) = D$, $f(C) = E$ e per ciascuna di queste $f$ si descriva l'immagine del triangolo $ABC$.

**Esercizio 3.** (a) Dire se esiste ed è unica una proiettività $f : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ tale che
$f([0 : 2 : 0]) = [0 : 0 : 1]$
$f([0 : 0 : 1]) = [0 : 3 : 1]$
$f([1 : 1 : 0]) = [1 : 0 : 0]$
$f([1 : 0 : 1]) = [1 : 1 : 1]$
ed eventualmente trovarla.
(b) Trovare la proiezione di $A = [1 : 2 : 2]$ da $P = [1 : 0 : 1]$ su $r = \{[x_0 : x_1 : x_2] | \, x_0 = x_1\}$; trovare un punto $B$ tale che la proiezione di $P$ da $B$ su $r$ sia $[1 : 1 : 0]$.
(c) Sia $s$ la retta di equazione $\{[x_0 : x_1 : x_2] | \, x_0 = x_2\}$. Trovare se esiste una proiettività $f$ tale che $f(r) = s$ e $f^2 = I$.
(d) Siano $r_i$, $i = 1, 2, 3$, tre rette distinte di $\mathbf{P}^2$ non passanti tutte per lo stesso punto. Se $f$ è una proiettività di $\mathbf{P}^2$ e $f(r_i) = r_i$ $i = 1, 2, 3$ allora $f = I$? Motivare la risposta.