3^o Compito di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 23/4/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. i) Dire se la seguente matrice reale è diagonalizzabile ed eventualmente trovare una base di autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) Calcolare $\det(iA)$ dove $i = \sqrt{-1}$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbf{R}$. Siano H un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in V e r un sottospazio vettoriale di dimensione 1 in V tali che $r \cap H = \{0\}$.
i) Sia $\mathcal{S}$ il seguente sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$:

$$\mathcal{S} = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) \subset H, \ e \ f(r) \subset r\}$$

Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}$.
ii) Sia

$$\mathcal{S}' = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) = H \ e \ f(r) = r\}$$

Dire se $\mathcal{S}'$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$; motivare la risposta.
iii) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V tale che $r = < v_1 >$.

Trovare un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(r) = r$ e $\dim \ker f = 2$ (scrivere ad esempio la sua matrice nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ o dire chi sono $f(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$).

Trovare infine un'applicazione lineare $h : V \to V$ tale che $(h \circ f)(r) = \{0\}$ e $\dim \ker h = 1$.

Esercizio 3. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette distinte nel piano affine $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.

Scegliere un sistema di coordinate affini opportuno e determinare il gruppo

$$G = \{f : \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \to \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \ affinita' \ t.c. \ f(r_i) = r_i \ per \ i = 1, 2, 3\}$$

nei due seguenti casi:

a) $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$, $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$, $r_1 \cap r_3 \neq \emptyset$, $r_2 \cap r_3 \neq \emptyset$

b) $r_1 \cap r_2 \cap r_3 \neq \emptyset$

Compito di Geometria 1, A.A. 2000-2001 Appello straordinario 23/4/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Discutere al variare di $k \in \mathbf{R}$ l'esistenza e l'unicitá di un polinomio f a coefficienti reali di grado ≤ 2 tale che $f(1) = 0$, $f(k+1) = k$, $f(10) = 10$.

Esercizio 2. Sia

$$A_b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Calcolare rango e determinante di A_b e di ${A_b}^3$ al variare di $b \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3. i) Dire se la seguente matrice reale è diagonalizzabile ed eventualmente trovare una base di autovettori.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ii) Calcolare $\det(iA)$ dove $i = \sqrt{-1}$.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbf{R}$. Siano H un sottospazio vettoriale di dimensione 2 in V e r un sottospazio vettoriale di dimensione 1 in V tali che $r \cap H = \{0\}$.
i) Sia $\mathcal{S}$ il seguente sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$:

$$\mathcal{S} = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) \subset H, \ e \ f(r) \subset r\}$$

Calcolare la dimensione di $\mathcal{S}$.
ii) Sia

$$\mathcal{S}' = \{f \in Hom(V, V) \mid f(H) = H \ e \ f(r) = r\}$$

Dire se $\mathcal{S}'$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$; motivare la risposta.
iii) Sia $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V tale che $r =< v_1 >$.

Trovare un'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che $f(r) = r$ e $\dim \ker f = 2$ (scrivere ad esempio la sua matrice nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ o dire chi sono $f(v_i)$ per $i = 1, 2, 3$).

Trovare infine un'applicazione lineare $h : V \to V$ tale che $(h \circ f)(r) = \{0\}$ e $\dim \ker h = 1$.