Scritto di Geometria 1, A.A. 1999-2000, 22/1/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. 5 + 4 =9
i) Si trovi per quali valori di $h \in \mathbf{R}$ il seguente sistema lineare ha soluzione:

$$\begin{cases} hx - 2hy + hz &= 2 \\ -x + (h+1)y + hz &= 0 \\ x - 2y &= h \end{cases}$$

ii) Si calcoli le eventuali soluzioni del sistema precedente nel caso $h = 1$.

Esercizio 2. 4 + 3 =7 Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 20 & 444 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Calcolare il determinante di A.
ii) Calcolare il determinante di AB^2.

Esercizio 3. 7 Sia $A \in M_n(\mathbf{R})$ tale che $A^2 = I$. Dimostrare che $n - tr(A)$ è un numero naturale compreso fra 0 e $2n$ divisibile per 2.

Esercizio 4. 4+5=9 i) Discutere al variare del parametro reale a la diagonalizzabilità della seguente matrice reale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Se $a = 9$ determinare una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori.

Notazioni. $M_n(\mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$. tr denota la traccia di una matrice quadrata.