Scritto di Geometria 1, a.a. 2003-2004, 21 settembre 2004

Motivare accuratamente le risposte; le risposte non motivate non saranno considerate valide.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita nel modo seguente

$$f(x, y, z, w) = (y, 0, w, 0)$$

a) Trovare una base di $Ker(f) \cap \{(x, y, z, w)|\ x + y + z + w = 0\}$
b) Trovare $M_{E,E}(f)$ e $M_{B,E}(f)$ dove E è la base canonica e $B = \{e_4, e_2, e_3 + e_1, e_1\}$.
c) Dire se f è diagonalizzabile.
d) Trovare, se esiste, $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $g(ker\ f) = \{(x, y, z, w)|\ x + y = z + w = 0\}$

Esercizio 2. Dire se i seguenti sottinsiemi di $M(n \times n, \mathbf{R})$ sono dei sottospazi vettoriali ed eventualmente calcolare la loro dimensione.
a) $S_1 = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R})|\ tr(A) = 3\}$
b) $S_2 = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R})|\ tr(A) = atr(A)\}$
c) $S_3 = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R})|\ (tr(A))^2 + tr(A) = 0\}$
d) $S_4 = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R})|\ tr(A)A = tr(A)^tA\}$
dove

$$atr(A) := a_{1,n} + ... + a_{n,1}$$

(la somma degli elementi sulla "diagonale secondaria").

Esercizio 3. Sia $f : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ definita nel modo seguente:

$$A \mapsto tr(A)I$$

a) Dimostrare che f è lineare.
b) Dire se f è invertibile e dire che dimensioni hanno $Ker(f)$ e $Im(f)$
c) Dire se f è diagonalizzabile e dire quali sono gli autovalori di f.

Scritto di Geometria 2, a.a. 2003-2004, 21 settembre 2004

Motivare accuratamente le risposte. Le risposte non motivate non saranno considerate valide.

Esercizio 1. Siano

$$r = \{(1+t, 2, 0) |\ t \in \mathbf{R}\}$$

$$s = \{(x_1, x_2, x_3) |\ x_1 + x_2 = 2\ \ x_2 + x_3 = 2\}$$

$$q = \{(t, 3t, t)\ t \in \mathbf{R}\}$$

a) Esiste un piano π contenente r e s? se la risposta è affermativa trovarne un'epressione cartesiana.
b) Trovare, se esiste, un piano parallelo a r avente intersezione non vuota con s e q.
c) Identificate $\mathbf{R}^3$ con $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3 | x_0 \neq 0\}$.
Sia $\tilde{s}$ la retta di $\mathbf{P}^3$ tale che

$$\tilde{s} \cap \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3 | x_0 \neq 0\} = s$$

(cioè $\tilde{s}$ è la retta di $\mathbf{P}^3$ che intersecata con la parte affine di $\mathbf{P}^3$ è s). Trovare una forma cartesiana di $\tilde{s}$.

Esercizio 2. Nel piano euclideo con coordinate ortogonali Oxy sia C la conica di equazione

$$x^2 + 2y^2 + 4x + 6y - 10 = 0$$

a) Si trovi una isometria f tale che $f(C)$ sia in forma canonica
b) Si calcoli il centro di C
c) L'insieme $\mathbf{A}^2 \setminus C$ è diviso in due regioni, interna ed esterna a C. Si trovi per quali valori di $t \in \mathbf{R}^2$ il punto $P_t = (t, t)$ è interno o esterno a C.
d) Si trovino le rette parallele alla retta $y - x = 0$ che sono tangenti a C e si determini i punti di tangenza.

Esercizio 3.
a) Nel piano affine con coordinate Oxy siano r_i $i = 1, 2, 3$ tre rette di equazioni rispettivamente $a_i x = b_i$ $i = 1, 2, 3$. Discutere la reciproca posizione delle tre rette (in funzione di $A := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$) (discutere non solo il parallelismo ma anche la coincidenza).
b) Quando due terne di rette parallele sono affinemente equivalenti? precisamente siano $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3$ sei rette del piano con r_2 e r_3 parallele a r_1 e s_2 e s_3 parallele a s_1; dire quando esiste un'affinità del piano che manda $r_1 \cup r_2 \cup r_3$ in $s_1 \cup s_2 \cup s_3$.