GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito del 21 gennaio 2010, A.A. 2009-2010, FILA 1

1) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Sia $n \geq 2$. Sia A la matrice $n \times n$ così definita $A_{i,j} = 2i + j$ per $i, j \in \{1, ..., n\}$. Calcolare il rango e il determinante di A (eventualmente al variare di n). Trovare, se esistono, $X, Y \in M(n \times n, \mathbf{R})$ di rango 1 tali che $A = X + Y$ e $Y_{1,1} = 3$.

2) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Siano

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\} \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = 4, \quad z = 0 \right\}$$

Trovare un'espressione cartesiana del piano π parallelo a r e s e passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) **MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.**
Siano $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $i \in \{1, ..., n\}$ e siano H e B due matrici $n \times n$ tali che $H_{i,j} = B_{i,j}$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ e $H_{i,i} = B_{i,i} + \lambda_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
a) Dimostrare che se $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, allora $HB = BH$
b) Se non tutti i λ_i sono uguali fra loro, l'affermazione è sempre vera? Se sì, dimostrarla, se no trovare un controesempio.

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito del 21 gennaio 2010, A.A. 2009-2010, FILA 2

1) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Sia $n \geq 2$. Sia A la matrice $n \times n$ così definita $A_{i,j} = i + 2j$ per $i, j \in \{1, ..., n\}$. Calcolare il rango e il determinante di A (eventualmente al variare di n). Trovare, se esistono, $X, Y \in M(n \times n, \mathbf{R})$ di rango 1 tali che $A = X + Y$ e $Y_{1,1} = 3$.

2) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Siano

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\} \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = 3, \quad z = 2 \right\}$$

Trovare un'espressione cartesiana del piano π parallelo a r e s e passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3) **MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.**
Siano $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $i \in \{1, ..., n\}$ e siano A e B due matrici $n \times n$ tali che $A_{i,j} = B_{i,j}$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ e $A_{i,i} = B_{i,i} - \lambda_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
a) Dimostrare che se $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, allora $AB = BA$
b) Se non tutti i λ_i sono uguali fra loro, l'affermazione è sempre vera? Se sì, dimostrarla, se no trovare un controesempio.

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito del 21 gennaio 2010, A.A. 2009-2010, FILA 3

1) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Sia $n \geq 2$. Sia A la matrice $n \times n$ così definita $A_{i,j} = 3i + j$ per $i, j \in \{1, ..., n\}$. Calcolare il rango e il determinante di A (eventualmente al variare di n). Trovare, se esistono, $X, Y \in M(n \times n, \mathbf{R})$ di rango 1 tali che $A = X + Y$ e $Y_{1,1} = 2$.

2) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Siano

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\} \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y = 5, \quad z = 2 \right\}$$

Trovare un'espressione cartesiana del piano π parallelo a r e s e passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3) **MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.**
Siano $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $i \in \{1, ..., n\}$ e siano C e E due matrici $n \times n$ tali che $C_{i,j} = E_{i,j}$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ e $C_{i,i} = E_{i,i} - \lambda_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
a) Dimostrare che se $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, allora $CE = EC$
b) Se non tutti i λ_i sono uguali fra loro, l'affermazione è sempre vera? Se sì, dimostrarla, se no trovare un controesempio.

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito del 21 gennaio 2010, A.A. 2009-2010, FILA 4

1) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Sia $n \geq 2$. Sia A la matrice $n \times n$ così definita $A_{i,j} = i + 3j$ per $i, j \in \{1, ..., n\}$. Calcolare il rango e il determinante di A (eventualmente al variare di n). Trovare, se esistono, $X, Y \in M(n \times n, \mathbf{R})$ di rango 1 tali che $A = X + Y$ e $Y_{1,1} = 2$.

2) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.** Siano

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R} \right\} \qquad s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + 2y = 3, \quad z = 2 \right\}$$

Trovare un'espressione cartesiana del piano π parallelo a r e s e passante per $\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$.

3) **MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.**
Siano $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $i \in \{1, ..., n\}$ e siano F e G due matrici $n \times n$ tali che $F_{i,j} = G_{i,j}$ $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$ e $F_{i,i} = G_{i,i} + \lambda_i$ $\forall i \in \{1, ..., n\}$.
a) Dimostrare che se $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, allora $FG = GF$
b) Se non tutti i λ_i sono uguali fra loro, l'affermazione è sempre vera? Se sì, dimostrarla, se no trovare un controesempio.