II Compito di Geometria 2 (Nuovo Corso di Laurea), A.A. 2001-2002, 20/5/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.
a) Calcolare la segnatura della forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ espressa nella base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Dire se esiste un vettore $v \in \mathbf{R}^3$ non nullo tale che $b(v,v) = 0$ (motivare la risposta).

Esercizio 2.
a) Si dia la classificazione affine al variare di $t \in \mathbf{R}$ della conica C_t di equazione

$$x^2 - 6xy + ty^2 + x - (t^2 + 1) = 0$$

b) Per $t = 10$ si trovi l'area della regione limitata di piano racchiusa dalla conica C_{10}.

Esercizio 3.
a) Trovare tutte le affinita' del piano che mandano il segmento

$$\{(x,y) | 1 \leq x \leq 2 \; y = 0\}$$

in se' (motivare la risposta) .
b) Si trovi una affinitá che porta il triangolo di vertici $P_i = (i, i^3)$ per $i = 1, 2, 3$ nel triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.
c) Sia Q l'intersezione tra l'asse delle ascisse e la retta per P_2 e P_3. Calcolare il rapporto semplice $(P_2 P_3 Q)$.
d) Sia f una similitudine del piano diversa dall'identitá tale che $f^2 = 1_{A^2}$. Provare che f é una simmetria assiale o centrale.

Esercizio 4.
Sia r la retta in P^2 per i punti $A = (0,1,0)$ e $B = (1,3,5)$ e sia s la retta per i punti $C = (0,1,2)$ e $D = (2,1,0)$.
a) Si trovi il punto E di intersezione tra r e s.
b) Sia $F = (1,1,1)$ e $\pi_F : r \to s$ la proiezione dal punto F. Calcolare $\pi_F(A)$ e $\pi_F(B)$.
c) Esiste una proiettivitá f del piano tale che $f(A) = C$, $f(B) = D$, $f(E) = F$? (motivare la risposta)