Geometria I, 20 gennaio 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali ed eventualmente calcolarne la dimensione:
a) $\{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 |\ (x,y) = (z,w)\ \ x^2 = y^2\ \ z = w\}$
b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 |\ x^2 = y^2\}$
c) $\{f \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) |\ f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3\}$
d) $\{f \in Hom(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3) |\ f(e_1) \in < 2e_1 + e_2 + e_3 >\}$

Esercizio 2. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Sia $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ così definita:
$$h(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} v-w \\ u-v \\ w-u \end{pmatrix}$$
a) Scrivere la matrice associata a $g = f_A \circ h$ nella base canonica.
b) Trovare una base di $Ker(g)$ e $Im(g)$.
c) Dire se g è diagonalizzabile ed eventualmente trovare una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori per g.
d) Trovare se possibile una matrice B 3×3 tale che $f_B \circ h$ abbia nucleo di dimensione 2 e una matrice C 3×3 tale che $h \circ f_C$ abbia immagine di dimensione 1.

Esercizio 3. a) Calcolare il determinante di
$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 9 & 11 & 11 & 11 \\ 8 & 8 & 12 & 12 \\ 7 & 7 & 7 & 13 \end{pmatrix}$$
b) Siano $x_1, ..., x_n$ e $y_2, ..., y_n$ numeri reali. Sia A la matrice $n \times n$ la cui prima riga è $(x_1, ..., x_1)$ la seconda riga è $(y_2, x_2, ..., x_2)$, la terza riga è $y_3, y_3, x_3, ..., x_3$ e così via fino all' ultima riga $(y_n, ..., y_n, x_n)$. Calcolare il determinante di A.

Esercizio 4. Siano A e B due matrici $n \times n$. Dimostrare che $\begin{pmatrix} I & B \\ A & I \end{pmatrix}$ è invertibile se e solo se $det\ (I - AB) \neq 0$ e $det\ (I - BA) \neq 0$.
Suggerimento: provare a costruire l'inversa a blocchi.

Geometria II, 20 gennaio 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.
Nello spazio euclideo consideriamo il punto $P = (0, 0, 3)$ e la retta r di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 4t + 5$, $z = -t$. Si trovi
i) tutti i piani passanti per P, paralleli a r e che hanno distanza pari a 2 da r
ii) l'equazione del luogo S dei punti che sono equidistanti da P e dall'origine
iii) l'equazione dell'immagine $s_P(S)$ dove s_P è la simmetria centrata in P.

Esercizio 2.
Nel piano euclideo si consideri la retta r di equazione $x + y = 1$ e il punto $Q = (-1, -1)$.
i) Studiare la conica data dal luogo dei punti P del piano tali che $d(P, Q) = 2d(P, r)$. Dire se è a centro e in caso affermativo trovare il centro.
ii) Trovare (se esistono) gli asintoti della conica ed il loro punto di intersezione

Esercizio 3. Descrivere l'inviluppo convesso di due rette nel piano e nello spazio analizzando i vari casi.

Esercizio 4. Sia f la proiettività del piano che porta i punti di coordinate omogenee $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$, $(1, 1, 1)$ rispettivamente nei punti $(1, t, t^2)$ per $t = 0, 1, 2, 3$.
i) Calcolare le coordinate di $f(3, 2, 1)$.
ii) Trovare il luogo dei punti fissi di f.