

Scritto di Geometria 2, a.a. 2003-2004, 19 maggio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. 1) Calcolare la segnatura della forma bilineare simmetrica $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che la matrice associata nella base canonica sia

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Trovare se esiste una forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $b(e_1, e_3) = -1$ e $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3)$ e di segnatura $(2, 1)$.

3) Trovare se esiste una forma bilineare $b : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ tale che $b(e_1, e_3) = -1$ e $b(e_1, e_1) = b(e_2, e_2) = b(e_3, e_3)$ e di segnatura $(0, 1)$.

Esercizio 2. Nel piano affine \mathbf{A}^2 consideriamo i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$, $P_4 = (0, 1)$, $P_5 = (2, 1)$, $P_6 = (2, 2)$ e sia Q il quadrato di vertici $P_1P_2P_3P_4$.

1) Trovare l'unica affinità f tale che $f(P_1) = P_2$, $f(P_4) = P_3$, $f(P_2) = P_5$ e descrivere $f(Q)$.

2) Sia C la circonferenza inscritta in Q e sia f l'affinità trovata al punto precedente. Trovare l'equazione dell'ellisse $f(C)$, la sua area e le lunghezze dei suoi semiassi (facoltativo: trovare i semiassi).