18 maggio 1999

3^o Compitino di Geometria 1

Laurea e Diploma in Matematica – A.A.1998/99

Esercizio 1] Si consideri in $\mathbf{R}^2$ la conica C di equazione

$$3x^2 + 4xy - 8x - 4y - 3 = 0$$

a) Scrivere le equazioni canoniche affini, reale e complessa, di C.

b) Scrivere l'equazione canonica metrica reale di C.

c) Trovare le trasformazioni di coordinate che riducono l'equazione di C alle equazioni canoniche precedenti.

Esercizio 2] Sia V lo spazio vettoriale reale di dimensione 3 dei vettori liberi e si indichino con $< \, , \, >$ e $\wedge$ gli usuali prodotti scalare e vettoriale. Fissati due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tra loro ortogonali e di norma 1, si considerino gli endomorfismi $\varphi_{s,t} : V \to V$,

$$\varphi_{s,t}(\vec{x}) = s\ \vec{x} \wedge \vec{u} + t\ \vec{v} \wedge \vec{x} + <\vec{x}, \vec{v}>\vec{u} + <\vec{x}, \vec{u}>\vec{v}$$

dove $s, t \in \mathbf{R}$.

a) Trovare la matrice di $\varphi_{s,t}$ rispetto alla base $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$.

b) Determinare i valori $s, t \in \mathbf{R}$ tali che $\varphi_{s,t}$ sia autoaggiunto rispetto a $< \, , \, >$.

c) Si determinino gli autovalori e i relativi autospazi di $\varphi_{0,0}$.

Esercizio 3] a) Sia A una matrice simmetrica reale $n \times n$ tale che $A^5 = \mathbf{0}$. Provare che $A = \mathbf{0}$.

b) Sia ora M una matrice complessa qualsiasi $n \times n$ tale che $M^5 = \mathbf{0}$. Provare che $tr(M) = 0$ e che $I + M$ è invertibile.

Tempo totale: $2^h 30'$.