Scritto di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 17/9/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $\mathbf{C}_2[x,y]$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a 2 nelle incognite x e y a coefficienti complessi. Sia

$$\mathcal{S}_t = \{p(x,y) \in \mathbf{C}_2[x,y] \mid p(x,y) = 0 \; se \; x = ty \; e \; p(0,1) = 0\}$$

Dimostrare che $\mathcal{S}_t$ è un sottospazio di $\mathbf{C}_2[x,y]$ e calcolarne la dimensione al variare di $t \in \mathbf{C}$.

Esercizio 2. Nello spazio affine di dimensione 3 sia r la retta

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbf{R}\}$$

e sia s la retta

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad t.c. \;\; x + 2y = 0 \;\; e \;\; z = 2\}$$

i) Dire quale è la mutua posizione delle due rette.
ii) Trovare, se esistono, i valori di k per cui il piano $\pi_k := \{(k+1)x + y + kz = 1\}$ è parallelo a r.

Esercizio 3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e motivare accuratamente le risposte (le risposte non motivate accuratamente saranno considerate non valide):
i) Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $v \in V - \{0\}$. L'insieme $\{f \in Hom(V,V) \mid v \;\; autovettore \;\; per \;\; f\}$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V,V)$.
ii) Esiste un'applicazione $f : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ surgettiva tale che

$$ker(f) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

iii) Sia V un spazio vettoriale su un campo K e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base; esiste $f \in V^\vee$ tale che $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = 2$, $f(v_1 + v_2) = 4$.
iv) Sia V un spazio vettoriale su un campo K e sia $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una sua base; esiste una e una sola $f \in V^\vee$ tale che $f(v_1) = 2$, $f(v_2) = 2$, $f(v_1 + v_2) = 4$.

Esercizio 4. Sia $M(n \times n, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$.

Sia $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che ${}^tA = A$. Dimostare che se $A^2 + cA = 0$ per qualche $c \in \mathbf{R}^+$ allora A è semidefinita negativa.