GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito, 16 novembre 2006, A.A. 2007-2008, FILA ?

1) DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO

a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare , se esiste, $B \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ tale che $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Siano $A = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_2 + x_3 + x_4 = 0 \}$ e $B = \{ \begin{pmatrix} r+k \\ r-2z \\ r+k \\ r-2z \end{pmatrix} \mid r, z, k \in \mathbf{R} \}$. Trovare

i) una forma cartesiana per B

ii) una base di A

iii) Dire per quali valori di t e s il vettore $v_{t,s} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 3t+s \\ s \end{pmatrix}$ appartiene a $A \cap B$.

d) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Trovare una base del nucleo di f_A.

ii) Trovare una base dell'immagine di f_A.

2) (MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO)
Data $C \in M(n \times n, \mathbf{R})$, definiamo $f_C : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times 2n, \mathbf{R})$ nel modo seguente

$$f_C(A) = (CA|{}^tA)$$

a) Dimostrare che f_C è lineare.
b) Dire che dimensione hanno $Ker(f_C)$ e $Im(f_C)$ (eventualmente al variare della matrice C e di n). Nel caso $n = 2$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trovare una base di $Im(f_C)$.
c) Trovare, se esiste, $g : M(n \times 2n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $g \circ f_C = I_{M(n \times n, \mathbf{R})}$ $\forall C \in M(n \times n, \mathbf{R})$.
d) Esiste $C \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $f_C(A) = ({}^tA|{}^tA)$ $\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$?

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito, 16 novembre 2006, A.A. 2007-2008, FILA ?

1) DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO

a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare , se esiste, $B \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ tale che $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Siano $A = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \}$ e $B = \{ \begin{pmatrix} r-k \\ r+z \\ r-k \\ r+z \end{pmatrix} \mid r, z, k \in \mathbf{R} \}$. Trovare

i) una forma cartesiana per B

ii) una base di A

iii) Dire per quali valori di t e s il vettore $v_{t,s} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 3t+s \\ s \end{pmatrix}$ appartiene a $A \cap B$.

d) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Trovare una base del nucleo di f_A.

ii) Trovare una base dell'immagine di f_A.

2) (MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO)
Data $Z \in M(n \times n, \mathbf{R})$, definiamo $f_Z : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times 2n, \mathbf{R})$ nel modo seguente

$$f_Z(A) = (ZA|{}^tA)$$

a) Dimostrare che f_Z è lineare.
b) Dire che dimensione hanno $Ker(f_Z)$ e $Im(f_Z)$ (eventualmente al variare della matrice Z e di n). Nel caso $n = 2$ e $Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ trovare una base di $Im(f_Z)$.
c) Trovare, se esiste, $g : M(n \times 2n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $g \circ f_Z = I_{M(n \times n, \mathbf{R})}$ $\forall Z \in M(n \times n, \mathbf{R})$.
d) Esiste $Z \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $f_Z(A) = ({}^tA|{}^tA)$ $\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$?

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito, 16 novembre 2006, A.A. 2007-2008, FILA ?

1) DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO

a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare , se esiste, $B \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ tale che $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Siano $A = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}$ e $B = \{ \begin{pmatrix} 2r+k \\ 2r-2z \\ 2r+k \\ 2r-2z \end{pmatrix} \mid r, z, k \in \mathbf{R}\}$. Trovare

i) una forma cartesiana per B

ii) una base di A

iii) Dire per quali valori di t e s il vettore $v_{t,s} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 3t+s \\ s \end{pmatrix}$ appartiene a $A \cap B$.

d) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Trovare una base del nucleo di f_A.

ii) Trovare una base dell'immagine di f_A.

2) (MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO)
Data $H \in M(n \times n, \mathbf{R})$, definiamo $f_H : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times 2n, \mathbf{R})$ nel modo seguente

$$f_H(A) = (HA|{}^tA)$$

a) Dimostrare che f_H è lineare.
b) Dire che dimensione hanno $Ker(f_H)$ e $Im(f_H)$ (eventualmente al variare della matrice H e di n). Nel caso $n = 2$ e $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ trovare una base di $Im(f_H)$.
c) Trovare, se esiste, $g : M(n\times 2n, \mathbf{R}) \to M(n\times n, \mathbf{R})$ tale che $g \circ f_H = I_{M(n\times n,\mathbf{R})}$ $\forall H \in M(n\times n, \mathbf{R})$.
d) Esiste $H \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $f_H(A) = ({}^tA|{}^tA)$ $\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$?

GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito, 16 novembre 2006, A.A. 2007-2008, FILA ?

1) DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO

a) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Trovare , se esiste, $B \in M(2 \times 2, \mathbf{R})$ tale che $AB - BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

b) Siano $A = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid -x_2 + x_3 + 3x_4 = 0\}$ e $B = \{ \begin{pmatrix} r+2k \\ r-3z \\ r+2k \\ r-3z \end{pmatrix} \mid r, z, k \in \mathbf{R}\}$. Trovare

i) una forma cartesiana per B

ii) una base di A

iii) Dire per quali valori di t e s il vettore $v_{t,s} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 3t+s \\ s \end{pmatrix}$ appartiene a $A \cap B$.

d) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Trovare una base del nucleo di f_A.

ii) Trovare una base dell'immagine di f_A.

2) (MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO)
Data $Q \in M(n \times n, \mathbf{R})$, definiamo $f_Q : M(n \times n, \mathbf{R}) \to M(n \times 2n, \mathbf{R})$ nel modo seguente

$$f_Q(A) = (QA|^tA)$$

a) Dimostrare che f_Q è lineare.
b) Dire che dimensione hanno $Ker(f_Q)$ e $Im(f_Q)$ (eventualmente al variare della matrice Q e di n). Nel caso $n = 2$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ trovare una base di $Im(f_Q)$.
c) Trovare, se esiste, $g : M(n \times 2n, \mathbf{R}) \to M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $g \circ f_Q = I_{M(n \times n, \mathbf{R})}$ $\forall Q \in M(n \times n, \mathbf{R})$.
d) Esiste $Q \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che $f_Q(A) = ({}^tA|^tA)$ $\forall A \in M(n \times n, \mathbf{R})$?