Compito di Geometria 1, A.A. 2000-2001, vecchio ordinamento, 15/1/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Notazioni. $M(m \times n, \mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$.

Esercizio 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 40 \end{pmatrix} \quad C = 3I_6$$

i) Calcolate $det(A^{300})$
ii) Calcolate $det(B)$.
iii) Calcolate $det(BCB^{-1}C)$
iv) Dite se A è nilpotente, motivando la risposta (le risposte non motivate saranno considerate non valide).

Esercizio 2. Sia $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$F \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ c \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

i) Determinare $ker\, F$ e $Im\, F$ e precisamente una loro base.
ii) Dire se F è diagonalizzabile.
iii) Determinare un'applicazione lineare $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che

$$(S \circ F) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (S \circ F) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\dim \ker S = 2$.
iv) Determinare un sottospazio vettoriale M' di $\mathbf{R}^4$ di dimensione non nulla tale che $S|_{M'} : M' \to \mathbf{R}^4$ sia iniettiva.

Esercizio 3. Sia $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ e sia r il rango di A. Sia $s \leq r$.
Dimostrare che esiste $B \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che il rango di BA sia s.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo sia

$$Q = \{(x, y, z) |\; x^2 + 4y^2 + 4xy - 7y + 2x + yz + xz + z^2 - z = 0\}$$

i) Dire che tipo di conica è la conica $C = Q \cap \{z = 0\}$ nel piano xy.
ii) Sia $P = (1, 1, 1)$. Siano A e B i punti di incontro di Q con la retta $x = y = 0$, precisamente sia B quello dei due punti che ha la terza coordinata diversa da 0. Sia s la retta passante per A e P. Trovare l'espressione cartesiana della retta che interseca s perpendicolarmente e passa per B.
iii) Sia r la retta passante per A e B. Trovare le affinità f tali che $f(s) \subset s$ e $f(r) \subset r$.

Compito di Geometria 1, A.A. 2001-2002, 15/1/2002
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Notazioni. $M(m \times n, \mathbf{R})$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbf{R}$.

Esercizio 1. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & 40 & 40 \end{pmatrix} \quad C = 3I_6$$

i) Calcolate $det(A^{300})$
ii) Calcolate $det(B)$.
iii) Calcolate $det(BCB^{-1}C)$
iv) Dite se A è nilpotente, motivando la risposta (le risposte non motivate saranno considerate non valide).

Esercizio 2. Sia $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ la seguente applicazione lineare

$$F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c \\ c \\ d \\ d \end{pmatrix}$$

i) Determinare $ker\, F$ e $Im\, F$ e precisamente una loro base.
ii) Dire se F è diagonalizzabile.
iii) Determinare un'applicazione lineare $S : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che

$$(S \circ F)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (S \circ F)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\dim \ker S = 2$.
iv) Determinare un sottospazio vettoriale M' di $\mathbf{R}^4$ di dimensione non nulla tale che $S|_{M'} : M' \to \mathbf{R}^4$ sia iniettiva.

Esercizio 3. Sia $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ e sia r il rango di A. Sia $s \le r$.
Dimostrare che esiste $B \in M(n \times n, \mathbf{R})$ tale che il rango di BA sia s.

Esercizio 4. Sia $S = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 | \; x_3 = x_2 + x_1 = 0 \}$.

Sia $T = < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$.

i) Trovare $S \cap T$.
ii) Trovare una base di $S + T$.
iii) Dire, motivando accuratamente la risposta, se esiste $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4$ lineare tale che $Im(g) = S$ (le risposte non motivate saranno considerate non valide).