12 LUGLIO 1999

SCRITTO DI GEOMETRIA 1

LAUREA E DIPLOMA IN MATEMATICA – A.A.1998/99

Esercizio 1. Sia $f_{r,s,t} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ data da
$(x, y, z)^t \mapsto (r^2x^r + ty + z,\ tx + (2-r)y^r + tz,\ x + y^{(r-2)^2} + sz)^t$, con r, s, t numeri reali.

a) Stabilire per quali valori di $r, s, t \in \mathbf{R}$, $f_{r,s,t}$ è lineare.

b) Calcolare il rango di $f_{1,s,t}$ al variare di di $s, t \in \mathbf{R}$.

c) Determinare una base di $Ker(f_{1,1,2}) \cap Ker(f_{1,1,1})$ e una base di $Ker(f_{1,1,2}) + Ker(f_{1,1,1})$.

Esercizio 2. a) Fornire le classificazioni affine complessa, affine reale e metrica della conica $C \subset \mathbf{R}^2$ di equazione $4xy + 4x - 6y + 1 = 0$.

b) Scrivere le trasformazioni di coordinate che riducono C alle forme canoniche affine complessa, affine reale e metrica.

Esercizio 3. Dato un sistema di riferimento ortogonale $\{O, x, y, x\}$ nello spazio euclideo, si considerino i 3 punti $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (10, 0, 0)$, $P_3 = (18, 6, 6)$.

a) Scrivere l'equazione del piano dove giace il triangolo $P_1,\ P_2,\ P_3$.

b) Trovare le equazioni cartesiane delle 3 mediane del triangolo $P_1,\ P_2,\ P_3$ ed il punto B in cui si incontrano.

c) Si determinino quali dei tre angoli individuati dalle 3 semirette $BP_1,\ BP_2,\ BP_3$ sono acuti e quali ottusi.

Esercizio 4. Sia E la matrice quadrata $n \times n$ con tutti i coefficienti uguali a 1, sia I la matrice identità $n \times n$ e si ponga $A = E + I$.

a) Provare che 1 è autovalore di A con molteplicità geometrica $n - 1$.

b) Ricordando che $tr(A)$ è uguale alla somma degli autovalori, si provi che anche la molteplicità algebrica di 1 è uguale a $n - 1$ e si calcoli $det(A)$.