Geometria I, 11 Novembre 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Fila I

Esercizio 1. Sia V_t il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,-1,2)$, $(1,-1,0,\sqrt{2})$, $(1,0,t^2-1,0)$
a) calcolare la dimensione di V_t al variare di $t \in \mathbf{R}$
b) si trovino equazioni cartesiane per V_t al variare di $t \in \mathbf{R}$
c) si determini per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ il vettore $-e_2 + e_3 = (0,-1,1,0) \in V_t$
d) per $t = 0$ si trovi un vettore v di $\mathbf{R}^4$ tale che $v \notin V_0$

Esercizio 2. Sia

$$C_n = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) | \sum_{j=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall i = 1,...,n \ \sum_{i=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall j = 1,...,n\}$$

a) Dire se C_n è un sottospazio ed eventualmente dire quanto è la dimensione di C_2.
b) Dimostrare che se $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ è tale che

$$\sum_{j=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall i = 1,...,n$$

e

$$\sum_{i=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall j = 1,...,n-1$$

allora $A \in C_n$.
c) Il prodotto di due elementi di C_n appartiene a C_n? (motivare accuratamente la risposta). (Suggerimento: trovare $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ tale che $A \in C_n$ se e solo se $Av = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ e ${}^t v A = (0,...,0)$)
d) Dire se esiste un elemento di C_n invertibile (motivare accuratamente la risposta). (Potete utilizzare lo stesso suggerimento del punto precedente)
e) Dire per quali valori di n esiste una matrice triangolare superiore diversa da zero in C_n (motivare accuratamente la risposta).

Geometria I, 11 Novembre 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze
Fila II

Esercizio 1. Sia V_t il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(1,0,-1,2)$, $(1,-1,0,\sqrt{3})$, $(1,0,t^2-1,0)$
a) calcolare la dimensione di V_t al variare di $t \in \mathbf{R}$
b) si trovino equazioni cartesiane per V_t al variare di $t \in \mathbf{R}$
c) si determini per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ il vettore $-e_2 + e_3 = (0,-1,1,0) \in V_t$
d) per $t = 1$ si trovi un vettore v di $\mathbf{R}^4$ tale che $v \notin V_1$

Esercizio 2. Sia

$$C_n = \{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) | \sum_{i=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall j = 1, ..., n \ \sum_{j=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall i = 1, ..., n\}$$

a) Dire se C_n è un sottospazio ed eventualmente dire quanto è la dimensione di C_2.
b) Dimostrare che se $A \in M(n \times n, \mathbf{R})$ è tale che

$$\sum_{i=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall j = 1, ..., n$$

e

$$\sum_{j=1,..,n} a_{i,j} = 0 \ \forall i = 1, ..., n-1$$

allora $A \in C_n$.
c) Il prodotto di due elementi di C_n appartiene a C_n? (motivare accuratamente la risposta). (Suggerimento: trovare $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$ tale che $A \in C_n$ se e solo se $A({}^t v) = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ e $vA = (0, ..., 0)$)
d) Dire se esiste un elemento di C_n invertibile (motivare accuratamente la risposta). (Potete utilizzare lo stesso suggerimento del punto precedente)
e) Dire per quali valori di n esiste una matrice triangolare inferiore diversa da zero in C_n (motivare accuratamente la risposta).