

**Prova scritta di Geometria I, 11 Novembre 2002 C.d.L. in Matematica,
Università di Firenze**

Esercizio 1. a) Dite se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali, motivando le risposte, ed in caso affermativo calcolatene la dimensione:

i) $S = \{(s, t, k, l, 0) \mid s, t, k, l \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^4$

ii) $T = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 \mid x + z = z - w, 2w + x = 0\} \subset \mathbf{R}^4$

b) Dire per quali matrici $n \times n$ B le seguenti funzioni $f_B: M(n \times n) \rightarrow M(n \times n)$ sono funzioni lineari motivando le risposte.

i) $f_B(A) = BA - B$

ii) $f_B(A) = BAB$

Esercizio 2. Siano $v_1 = (1, 1, 3, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ $v_3 = (0, 2, 0, 3)$.

i) Trovare un'espressione cartesiana di $S = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e calcolare la dimensione di S .

ii) Dire per quali valori di h il vettore $w_h = (0, 1, 2, h)$ appartiene a S .

Esercizio 3. Una matrice quadrata si dice *stocastica* se la somma degli elementi di ogni sua colonna vale 1. Ad esempio l'identità è una matrice stocastica.

a) Provare che A è una matrice stocastica se e solo se $(1, \dots, 1) \cdot A = (1, \dots, 1)$.

b) Provare che se A e B sono matrici stocastiche allora AB è stocastica.

c) Provare che se A è una matrice stocastica invertibile allora la sua inversa A^{-1} è ancora stocastica.

d) Esistono matrici stocastiche 3×3 non invertibili ? (motivare la risposta)

Notazioni. $M(m \times n)$ è lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in \mathbf{R} .