Prova scritta di Geometria II modulo
C.d.L. in Matematica, Università degli studi di Firenze
11 Settembre 2006

Esercizio 1: Si trovi la matrice dell'unica proiettività $f : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

e si calcoli $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Esercizio 2: Nel piano euclideo con coordinate cartesiane ortogonali fissate sono dati i triangoli $T = ABC$ e $T' = A'B'C'$ dove

$$A = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix}9/5\\12/5\end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Dimostrare che i due triangoli sono isometrici.

(b) Dimostrare che sono necessarie almeno tre simmetrie (assiali) per trasformare T in T'.

(c) Trovare tre simmetrie s_1, s_2, s_3 tali che $T' = s_1(s_2(s_3(T)))$.

Esercizio 3: Sia $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

(a) Si trovi una base ortonormale di W (rispetto al prodotto scalare euclideo).

(b) Si completi la base precedente ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

(c) Si calcoli la distanza del punto $(1, 0, 0, 0)$ da W.