Prova scritta di Geometria II modulo
C.d.L. in Matematica, Università degli studi di Firenze
11 aprile 2007

Esercizio A: Sia data, in dipendenza di un parametro reale u, la matrice

$$A_u = \begin{pmatrix} 3 & u & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & u & -3 \end{pmatrix}$$

e si consideri l'endomorfismo associato $f_u(x) = A_u x$.

1. Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f_u.
2. Dire per quali valori di u l'endomorfismo f_u è diagonalizzabile.
3. Per tali valori di u trovare una base di autovettori per f_u.

Soluzione: Il polinomio caratteristico di A_u è dato da $p_{A_u}(t) = -(t-1)^2(t+1)$ Gli autovalori di f_u sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebriche 2 e 1 rispettivamente. L'endomorfismo f_u è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di λ_1 è uguale a 2, cioè se

$$\mathrm{rk}(A_u - \lambda_1 I) = \mathrm{rk} \begin{pmatrix} 2 & u & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & u & -4 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{se u=0} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases} = 1$$

quindi se e solo se $u = 0$.

Restringiamoci quindi al caso $u = 0$. Abbiamo

$$V_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A_0 - \lambda_1 I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

e

$$V_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(A_0 - \lambda_2 I) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Span} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Perciò una base di autovettori di f_u è data da

$$\mathrm{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Esercizio B: Nello spazio euclideo $\mathbb{A}^3$ consideriamo la retta r di equazione

$$x - z + 1 = x + y + 2z = 0$$

e sia $P = (0, 1, 2)$.

1. Determinare il piano contenente r e P.
2. Trovare la proiezione ortogonale di P su r.
3. Trovare il simmetrico Q di P rispetto a r e calcolare la distanza tra P e Q.

Soluzione: Sostituendo le coordinate del punto P nell'equazione parametrica

$$u(x - z + 1) + v(x + y + 2z) = 0 \tag{1}$$

del fascio di piani passanti per la retta r si ottiene l'equazione $-u + 5v = 0$ che è soddisfatta per $(u, v) = (5, 1)$. Sostituendo questi valori dei parametri in (1) otteniamo l'equazione del piano H passante per r e P, cioè

$$H = \{6x + y - 3z + 5 = 0\}.$$

Dalle equazioni cartesiane troviamo che la giacitura della retta r è normale ai vettori $(1, 0, -1), (1, 1, 2)$. Usando il prodotto vettoriale o risolvendo il sistema lineare, si ottiene che $w = (1, -3, 1)$ è un vettore direttore per r. Il punto $R = (-1, 1, 0)$ appartiene alla retta r, quindi i punti della retta sono parametrizzati dall'espressione

$$R + tw, \qquad \text{al variare di } t \in \mathbb{R}.$$

La proiezione del punto P sulla retta r è data da

$$\pi_r(P) = R + \frac{\langle w, P - R\rangle}{|w|^2} w = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Il simmetrico di P rispetto ad r è dato da

$$s_r(P) = 2\pi_r(P) - P = -\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

La distanza di P con il simmetrico quindi è data da

$$d(P, s_r(P)) = |P - s_r(P)| = \frac{2}{11}\sqrt{506}.$$