2^o compito di Geometria 1, a.a. 2003-2004, 13 gennaio 2004
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. i) Dire se la seguente matrice è diagonalizzabile ed eventualmente trovare una base di $\mathbf{R}^3$ composta da autovettori di A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Dire per quali valori di a la seguente matrice è diagonalizzabile

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii) Trovare tutte le applicazioni lineari $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tali che $f_{A_0} \circ g = g \circ f_{A_0} = 0$

Esercizio 2. 2.1) Dire se le seguente affermazioni sono vere o false (motivare accuratamente le risposte; le risposte non motivate non saranno considerate valide):
a) Esiste un'applicazione lineare surgettiva $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$Ker(f) = \{(x, y, z)| \ x + z = 0\}$$

b) Esiste un'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $det(A + B) = det(A) + det(B) \ \forall A, B \in M(n \times n, \mathbf{R}) \ \forall n \in \mathbf{N} \ n \geq 1$
2.2) Sia $f : V \to W$ una funzione fra due spazi vettoriali. Dimostrare che la funzione f è lineare se e solo se il grafico di f

$$\Gamma_f = \{(v, f(v))| \ v \in V\}$$

è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.