Prova scritta di Geometria I, Vecchio Ordinamento, 10.7.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

i) Scrivere la matrice associata nelle basi canoniche.
ii) Trovare una base di $Im(f)$ e una base di $Ker(f)$.
iii) Calcolare la dimensione di $Im(f) + W$ dove

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x = 0\}$$

e trovarne una base.
iv) Trovare un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$

Esercizio. i) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dite se A è diagonalizzabile, calcolare gli autovalori e le molteplicità algebriche e geometriche.
ii) Sia

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

B è diagonalizzabile? Motivate la risposta.
iii) Calcolate il determinante di H^{10}, dove

$$H = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Esercizio. Dite se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali ed eventualmente calcolatene la dimensione:

$$\{(x, x - z, y) |\ x, y, z \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x = 0\} \cap \{(t^2, t, s) |\ t, s \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$$

$$\{A \in M(2 \times 2) |\ A^2 = 0\} \subset M(2 \times 2)$$

Esercizio. Siano nello spazio euclideo $P = (2, 0, 2)$ e $Q = (0, 0, 0)$ e $\pi = \{x + y = 3\}$.
i) Trovate la retta r passante per P e perpendicolare a π e trovate un'espressione cartesiana e una parametrica del piano γ contenente r e Q.
ii) Trovare il piano σ di $\mathbf{R}^3$ tale che P e Q siano simmetrici rispetto a σ.
iii) Trovare un piano α parallelo a $\{(t, t, s) |\ t, s \in \mathbf{R}\}$ e tale che il simmetrico di Q rispetto ad α appartenga a $\{(x, y, z) |\ x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 0\}$.

Prova scritta di Geometria I, Nuovo Ordinamento, 10.7.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

i) Scrivere la matrice associata nelle basi canoniche.
ii) Trovare una base di $Im(f)$ e una base di $Ker(f)$.
iii) Calcolare la dimensione di $Im(f) + W$ dove

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x = 0\}$$

e trovarne una base.
iv) Trovare un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$

Esercizio. i) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dite se A è diagonalizzabile, calcolare gli autovalori e le molteplicità algebriche e geometriche.
ii) Sia

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

B è diagonalizzabile? Motivate la risposta.
iii) Calcolate il determinante di H^{10}, dove

$$H = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Esercizio. Dite se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali ed eventualmente calcolatene la dimensione:

$$\{(x, x - z, y) |\ x, y, z \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x = 0\} \cap \{(t^2, t, s) |\ t, s \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{R}^3$$

$$\{A \in M(2 \times 2) |\ A^2 = 0\} \subset M(2 \times 2)$$

Esercizio. Discutere al variare di $k \in \mathbf{R}$ l'esistenza e l'unicità di una applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che
$f(1, -1, 1) = (1, -3)$
$f(-k, 0, 1) = (1, 2)$
$f(1, 0, -1) = (0, 2)$

Prova scritta di Geometria II, Nuovo Ordinamento, 10.7.02 C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio. Siano nello spazio euclideo $P = (2, 0, 2)$ e $Q = (0, 0, 0)$ e $\pi = \{x + y = 3\}$.
i) Trovate la retta r passante per P e perpendicolare a π e trovate un'espressione cartesiana e una parametrica del piano γ contenente r e Q.
ii) Trovare il piano σ di $\mathbf{R}^3$ tale che P e Q siano simmetrici rispetto a σ.
iii) Trovare un piano α parallelo a $\{(t, t, s)|\ t, s \in \mathbf{R}\}$ e tale che il simmetrico di Q rispetto ad α appartenga a $\{(x, y, z)|\ x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0\}$.

Esercizio. i) Trovare un'espressione cartesiana del più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^3$ contenente $P = [0 : 1 : 3 : 0]$ e $Q = [1 : 2 : 0 : 0]$.
ii) Trovare un'espressione cartesiana del più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^3$ contenente $P = [0 : 1 : 3 : 0]$ e $\{x_0 + x_1 = x_2 = 0\}$.
iii) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la segnatura della forma bilineare associata.
iv) Detta q la forma quadratica associata alla forma bilineare di iii), dire se

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3|\ q(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

è vuoto o no.

Esercizio. Siano

$$C = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$$
$$C' = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 4\}$$

i) Trovare tutte le isometrie che mandano C in C. Motivare molto accuratamente la risposta.
ii) Trovare tutte le isometrie che mandano $C \cup C'$ in $C \cup C'$. Motivare molto accuratamente la risposta.

Esercizio. a) Dire chi è l'inviluppo convesso dell'unione di un punto e una retta nel piano affine (distinguendo eventualmente vari casi). Motivare la risposta.
b) Dire chi è l'inviluppo convesso dell'unione di due punti e una retta nel piano affine (distinguendo eventualmente vari casi). Motivare la risposta.

Prova scritta di Geometria I e II, Nuovo Ordinamento, 10.7.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare così definita:

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

i) Scrivere la matrice associata nelle basi canoniche.
ii) Trovare una base di $Im(f)$ e una base di $Ker(f)$.
iii) Calcolare la dimensione di $Im(f) + W$ dove

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 |\ x = 0\}$$

e trovarne una base.
iv) Trovare un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $f \circ g = 0$

Esercizio. Discutere al variare di $k \in \mathbf{R}$ l'esistenza e l'unicità di una applicazione lineare $f : \mathbf{R}_2[x] \to \mathbf{R}^2$ tale che
$f(1 - x + x^2) = (1, -3)$
$f(-k + x^2) = (1, 2)$
$f(1 - x^2) = (0, 2)$

Esercizio. i) Trovare un'espressione cartesiana del più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^3$ contenente $P = [0 : 1 : 3 : 0]$ e $Q = [1 : 2 : 0 : 0]$.
ii) Trovare un'espressione cartesiana del più piccolo sottospazio proiettivo di $\mathbf{P}^3$ contenente $P = [0 : 1 : 3 : 0]$ e $\{x_0 + x_1 = x_2 = 0\}$.
iii) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la segnatura della forma bilineare associata.
iv) Detta q la forma quadratica associata alla forma bilineare di iii), dire se

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^3 |\ q(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

è vuoto o no.

Esercizio. a) Dire chi è l'inviluppo convesso dell'unione di un punto e una retta nel piano affine (distinguendo eventualmente vari casi). Motivare la risposta.
b) Dire chi è l'inviluppo convesso dell'unione di due punti e una retta nel piano affine (distinguendo eventualmente vari casi). Motivare la risposta.