Compito di Geometria 2 (Nuovo Corso di Laurea), A.A. 2001-2002, 10/4/2002 C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia

$$\mathcal{C} = \{(x,y) |\ 7x^2 + 5y^2 - 2\sqrt{3}xy + 2y = 0\}$$

Dite che tipo di conica è, trovatene eventualmente il centro, e infine trovate la forma canonica isometrica di $\mathcal{C}$.

Esercizio 2. Sia $r = \{(t, 0, 3+t) |\ t \in \mathbf{R}\}$ nello spazio euclideo. Sia $P = (5, 0, -1)$.
a) Trovare la forma cartesiana e parametrica del piano passante per $S = (1,1,1)$ e parallelo al piano contenente r e P.
b) Trovare, se esiste, un piano H parallelo a $< (1,0,0) >$ e tale che la retta simmetrica di r rispetto a H passi per P.
Nota. I due punti i) e ii) sono l'uno indipendente dall'altro.

Esercizio 3. Sia R il seguente sottoinsieme del piano euclideo:

$$R = r_1 \cup r_2 \cup r_3$$

dove

$$r_1 = \{(x,y) |\ y = -1\} \quad r_2 = \{(x,y) |\ x = 0\} \quad r_3 = \{(x,y) |\ y = 1\}$$

a) Trovare un'isometria f tale che
$f(r_1) = \{(x,y) |\ x = 4\}$,
$f(r_2) = \{(x,y) |\ y = 0\}$,
$f(r_3) = \{(x,y) |\ x = 6\}$
b) Trovate tutte le isometrie f del piano euclideo tali che $f(R) \subset R$.

Esercizio 4. **a)** Dimostrate con un esempio che in generale l'unione di due insiemi convessi non è un convesso.
b) Dimostrate che i seguenti sottoinsiemi del piano affine sono convessi:
i) $C = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$
ii) $R = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\ y \geq 0\} \cup Conv((1,0), (-1,0), (0,-1))$
(dove $Conv$ sta ad indicare l'inviluppo convesso).
Nota. Per dimostrare che R è convesso potete supporre di aver già dimostrato che C è convesso anche se non ci siete riusciti.