Compito di Geometria I, 10 gennaio 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ così definita:

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x + y, w, z)$$

a) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica.
b) Trovare una base di $Ker(f)$ e una base di $Im(f)$
c) Dire se esiste un'applicazione lineare $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im(h) = Im(f)$ ed eventualmente trovarne una.
d) Dire se esiste un'applicazione lineare $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im(h) = Im(f)$ e $h(e_1) = e_3 + e_4$ ed eventualmente trovarne una e dire se è unica.

Esercizio 2. a) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 40 & 40 & 40 & 56 & 54 \\ 403 & 401 & 410 & 55 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Siano x e y due numeri reali. Sia A la matrice $2n \times 2n$ seguente:

$$\begin{pmatrix}
x & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & y \\
0 & x & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & y & 0 \\
. & 0 & x & 0 & . & . & . & . & . & 0 & y & 0 & . \\
. & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & x & y & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & y & x & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & . & . \\
. & 0 & y & 0 & . & . & . & . & . & 0 & x & 0 & . \\
0 & y & 0 & . & . & . & . & . & . & . & 0 & x & 0 \\
y & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 & x
\end{pmatrix}$$

(precisamente $A_{i,j} = x$ se $j = i$, $A_{i,j} = y$ se $j = 2n - i + 1$, $A_{i,j} = 0$ altrimenti, cioè tutti x sulla diagonale principale, tutti y sull'altra diagonale, 0 altrove).
Calcolare il determinante di A.

Esercizio 3. Sia

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) calcolare una base ortonormale di autovettori di $A_{3,3}$
ii) trovare i valori di (a, b) per cui esiste una base (non necessariamente ortonormale) di autovettori per $A_{a,b}$.