Geometria 1, corso di laurea in Matematica
Scritto, 9 settembre 2009, A.A. 2008-2009

NOME E COGNOME:

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTO FOGLIO:

1) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO) Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 |\ x^2 + xy = 0 \right\}$.
Dire se è un sottospazio vettoriale. Inoltre se lo è indicare una sua base, se non lo è dare un controsempio o alla chiusura per la somma o alla chiusura per il prodotto per uno scalare.

2) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO) Discutere al variare di k l'esistenza e l'unicità di un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to R^3$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k+1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

(cioè dire per quali valori di k non esiste, per quali valori di k esiste ed è unica, per quali valori di k esiste ma non è unica)

3) (MOTIVARE LE RISPOSTE, SCRIVERE IL PROCEDIMENTO) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una sua base. Sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dimostrare che esistono due basi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}$ di V tali che $M_{\mathcal{A},\mathcal{P}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

.

NOME E COGNOME:

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTA PAGINA:

4) (DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO)
Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$ sono dati il punto $P = (0, 2, 0, 1)$ e il sottospazio affine S di dimensione 2 di equazioni

$$S \ : \ \begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ x + 2y - w & = & 1 \end{cases}$$

(a) Scrivere delle equazioni parametriche per S.

(b) Scrivere delle equazioni parametriche dello spazio affine T di dimensione 2 perpendicolare ad S e passante per l'origine.

(c) Calcolare la proiezione P' di P rispetto ad S.

$$P' = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

(d) Calcolare il simmetrico P'' di P rispetto ad S.

$$P'' = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTO PAGINA:

5) (MOTIVARE LE RISPOSTE, SCRIVERE IL PROCEDIMENTO)
Siano C_1 e C_2 le coniche di equazione

$$C_1 \colon x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \qquad C_2 \colon \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1.$$

(a) Trovare una isometria f tale che $f(C_1) = C_2$. Scrivere esplicitamente la sua matrice completa associata.

(b) Descrivere tutte le isometrie f tali che $f(C_1) = C_2$.

(c) Dire se esiste una affinità f, che non sia una isometria, tale che $f(C_1) = C_2$. In caso positivo descrivere una tale affinità f. In caso negativo dimostrare che non può esistere.