8 giugno 2000

Scritto di Geometria 1

Laurea e Diploma in Matematica – A.A.1999/2000

Esercizio 1. Sia A_t la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2t & t \\ 0 & t & 1 \\ 2 & 1 & 1-t \end{bmatrix}$$

a) Studiare al variare di $t \in \mathbf{R}$ il rango di A_t.

b) Detta $B = A_1$, si calcoli $\det B$ e si trovino tutte le soluzioni del sistema

$$B \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \det B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. In $\mathbf{R}^3$ si considerino il piano $\pi: \ x + y - z + 1 = 0$ e, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ le rette r_α di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - \alpha t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

a) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, l'intersezione di π con r_α.

b) Detto P_α il punto di intersezione fra π ed r_α (quando esiste), dimostrare che tutti i punti P_α appartengono ad una stessa retta e trovarne delle equazioni parametriche e cartesiane.

c) Si calcoli l'inviluppo convesso in $\mathbf{R}^3$ dell'insieme $\bigcup_{\alpha \in \mathbf{R}} r_\alpha$

Esercizio 3. In $\mathbf{R}^2$ si considerino le coniche C_t di equazioni $x^2 + 2txy + 2t = 0$ con $t \in \mathbf{R}$.

a) Determinare, quando esiste, il centro delle C_t.

b) Al variare di $t \in \mathbf{R}$ fornire la classificazione affine delle C_t e scrivere delle trasformazioni affini che mutano le C_t nelle loro forme canoniche.

Esercizio 4. Sia V un qualsiasi spazio vettoriale di dimensione 2 e sia $F: V \to V$ un endomorfismo tale che $F \neq 0$ e $F^2 = 0$. Dimostrare che

a) F non è iniettivo e $KerF$ ha dimensione 1;

b) esiste una base B di V rispetto alla quale F ha matrice associata $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) F non è diagonalizzabile.