7 settembre 1999

Scritto di Geometria 1

Laurea e Diploma in Matematica – A.A.1998/99

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

a) Si trovi una matrice ortogonale O tale che $O^{-1}AO$ sia diagonale.

b) Si trovi una matrice ortogonale K tale che $K^{-1}A^2K$ sia diagonale.

Esercizio 2. Dato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, si consideri il tetraedro regolare T con vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$.

a) Si calcoli l'angolo tra due facce incidenti (in uno spigolo).

b) Si trovi il rapporto tra le due parti in cui il baricentro divide ogni altezza (condotta da un vertice perpendicolarmente sulla faccia opposta).

c) Si trovi quanti elementi ha il gruppo $\{g \in SO(3) | g(T) = T\}$.

Esercizio 3. Al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ si consideri la famiglia di coniche in $\mathbf{R}^2$, data da $C_\lambda : \ x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 4 = 0$.

a) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ fornire la classificazione affine reale di C_λ.

a) Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ scrivere la trasformazione di coordinate che muta l'equazione di C_λ nella sua equazione canonica.

Esercizio 4. In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (1,0,1,0)^t$, $v_2 = (1,1,0,0)^t$, $v_3 = (0,0,1,1)^t$, $v_4 = (1,0,1,1)^t$ ed i sottospazi $V = Span(v_1,\ v_2)$, $W_\mu = Span(v_1 + v_2 + (\mu - 1)v_3,\ v_1 - v_2 + (\mu^2 - 1)v_4)$. Si determinino la dimensione ed una base di $V \cap W_\mu$ e di $V + W_\mu$ al variare di $\mu \in \mathbf{R}$.