6 SETTEMBRE 2000

SCRITTO DI GEOMETRIA 1

LAUREA E DIPLOMA IN MATEMATICA – A.A.1999/2000

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema al variare di $a,\ b \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z & = & 1 + b \\ 2x + ay & = & b \\ 3x + 2ay + z & = & 1 + 2b \\ -x + ay + 2z & = & 1 + b \end{cases}$$

Esercizio 2. In $\mathbf{R}^4$, munito del prodotto scalare ordinario, si considerino i sottoinsiemi affini X_h di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 1 \\ hx_2 + x_3 & = & 1 \\ hx_2 + x_3 + hx_4 & = & 1 \end{cases}$$

a) Determinare per quali valori di $h \in \mathbf{R}$ X_h è una retta ed, in tal caso, trovarne delle equazioni parametriche.

b) Determinare (se esistono) i valori di $h \in \mathbf{R}$ per i quali la retta X_h è parallela al segmento di estremi $(1, 1, 1, 1)$ e $(2, 1, -1, 1)$.

c) Nel caso $h = 1$ determinare le equazioni cartesiane degli iperpiani passanti per l'origine ed ortogonali a X_1

Esercizio 3. In $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare canonico, si considerino gli endomorfismi

$$F_t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1-t)y \\ x + z \\ y \end{pmatrix}$$

dove $t \in \mathbf{R}$.

a) Determinare per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ F_t è diagonalizzabile.

b) Nel caso $t = 0$ determinare (se esiste) una base ortonormale di autovettori di F_0.

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale complesso e siano S, T due endomorfismi di V tali che $T \circ S = 0$.

a) Provare che se v è un autovettore di S con autovalore 2, allora $v \in Ker(T)$.

b) Provare che se v è un autovettore di T con autovalore 2, allora $v \notin Im(S)$.

c) Provare che se T non è invertibile, allora esiste un autovettore v di S tale che $T(v) = 0$.