Scritto di Geometria 1, A.A. 2000-2001, 7/6/2001
Laurea e diploma in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. i) Discutere al variare dei parametri reali a e b l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2ay &= b \\ 2x + 3(a-1)y &= 0 \\ (b+1)z &= a \end{cases}$$

ii) Trovare tutte le soluzioni del sistema nel caso $b = 0$, $a = -3$.

Esercizio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove $i = \sqrt{-1}$.

i) Calcolare il determinante di A.

ii) Detto $T \subset \mathbf{C}^3$ lo spazio delle righe di A e T' lo spazio delle righe di A^H (hermitiana di A), calcolare la dimensione di $T \cap T'$.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo reale con un sistema di riferimento ortonormale $Oxyz$ sia r la retta di equazioni $x = 0$, $y = 0$ e s la retta di equazioni $x + z - 1 = 0$, $z + 2y = 0$.

i) Trovare una retta l tale che $l \cap r \neq \emptyset$, $l \cap s \neq \emptyset$, l sia perpendicolare a r e parallela a $\{y = 1\}$.

ii) Calcolare la distanza di s dall'origine.

Esercizio 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovare la segnatura di A e una matrice ortogonale Q tale che ${}^tQAQ$ sia diagonale.