Scritto di Geometria I, 5 febbraio 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Siano

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x + z = 0 \ w = 0\}$$
$$Z = \{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x = 0 \ z = 0\}$$

a) Calcolare una base di $W \cap Z$ e una di $W + Z$
Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ definita nel seguente modo:

$$f(x, y, z, w) = (x + z, w, x, z)$$

b) Scrivere la matrice associata a f nella base canonica e la matrice associata a f nella base $\{e_1+e_2, e_3, e_4, e_2\}$
c) Dire se f è diagonalizabile.
d) Trovare una base di $f(W)$ e trovare se possibile un'applicazione lineare h non identicamente nulla tale che $h(f(W)) = 0$ e $h|_Z$ sia un isomorfismo.

Esercizio 2. Dire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali (motivando le risposte) ed eventualmente calcolare la dimensione ($\mathbf{R}_2[x]$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2):
a) $\{p(x) \in \mathbf{R}_2[x] |\ p(0) = p(1) + 1\}$
b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbf{R}^4 |\ x^2 + y^2 = 0 \quad x + w = 0\}$
c) $\{A \in M(n \times n, \mathbf{R}) |\ Ae_i \in < e_{i+1} > \ i = 1, ..., n-1 \ \ A(e_n) = 0\}$

Esercizio 3. a) Sia $n > 1$. Sia $f : M(n \times n, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ un'applicazione lineare tale che $f(AB) = f(A)f(B)$. Dimostrare che f è l'applicazione identicamente nulla.
Suggerimento: cercare di capire che valore assume f sugli elementi della base canonica $\{E_{i,j}\}_{ij=1,..,n}$ dello spazio vettoriale $M(n \times n, \mathbf{R})$.
b) L'enunciato è vero per $n = 1$? Motivare la risposta.

Esercizio 4. Siano x, y, z, w numeri reali e sia n un numero naturale. Calcolare (in funzione eventualmente di x, y, z, w, n) il rango delle seguenti matrici rispettivamente 6×6, $2n \times 2n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & x & y & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & x & y & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & x & y & 0 & . & . & . & . \\ x & x & . & . & x & x & y & y & . & . & y & y \\ z & z & . & . & z & z & w & w & . & . & w & w \\ 0 & . & . & . & 0 & z & w & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & z & w & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & z & w & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Scritto di Geometria II, 5 febbraio 2003
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Nello spazio euclideo si consideri il piano π di equazione $3x + 2y + z = 6$ e sia $P = (1, 2, 3)$.
a) Si calcoli la distanza di π da P.
b) Si trovi il simmetrico di P rispetto a π
c) Si trovi, tra tutte le rette passanti per P e parallele a π, quella che ha distanza minima dall'origine.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio di 3 variabili $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
a) esistono vettori (x, y, z) diversi dall'origine dove q si annulla ?
b) calcolare la segnatura di q
c) l' insieme dei punti del piano $\{(x, y)|q(x, y, 1) = 0\}$ é contenuto in qualche rettangolo ?

Esercizio 3.
Si consideri l'isometria del piano di equazioni $f(x, y) = (-y + 1, x + 2)$.
a) si trovino i punti fissi di f
b) si classifichi f
c) si trovino due rette r e s tali che f é la composizione delle due simmetrie assiali relative.

Esercizio 4. Nello spazio si consideri la retta $x = z = 2$ ed il segmento $S = \{t, 0, 0)|0 \leq t \leq 1\}$. Si descriva con un sistema di disuguaglianze l'inviluppo convesso di r e di S.