GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Scritto del 4 febbraio 2008, A.A. 2007-2008, FILA ?

PARTE A: DARE SOLO LE RISPOSTE FINALI SENZA IL PROCEDIMENTO

1) Dire se i seguenti sottoinsiemi sono dei sottospazi vettoriali ed, in caso di risposta positiva, trovare una base, in caso di risposta negativa trovare un controesempio alla chiusura per la somma o per la moltiplicazione per scalari:

$$S = \{ \begin{pmatrix} s+u \\ 2t+s+3u \\ t-s \end{pmatrix} \mid t, s, u \in \mathbf{R}\}$$

e, detta $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$T = \{p \in \mathbf{R}_2[x] | \, p(A) = 0\}$$

2) Sia $Z_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & t+2 \\ 0 & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Dire qual'è il rango di Z_t al variare di t in $\mathbf{R}$.

ii) Dire per quali valori di t Z_t è diagonalizzabile e per $t = 0$ dire quali sono gli autovalori e le loro molteplicità algebriche e geometriche.

iii) Trovare se esiste $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ lineare non nulla tale che $f_{Z_0} \circ g = g \circ f_{Z_0}$ sia l'applicazione nulla.

PARTE B: MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 e $f : V \to V$ una applicazione lineare tale che f^2 sia l' applicazione identica. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ è o $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$.