Prova scritta di Geometria I, Nuovo Ordinamento, 3.9.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sia $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ vettore delle incognite e sia $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{8} \end{bmatrix}$.

Parametrizzare tutte le soluzioni dei sistemi $Ax = b$ e $A^2x = 0$ specificando quanti parametri indipendenti vengono utilizzati.

Esercizio 2.

i) Trovare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ definito da $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

ii) Esprimere i vettori $(1, -1, 0, 1)$ e $(1, 2, -1, -1)$ come combinazione lineare della base trovata al punto i).

iii) Trovare una base ortonormale di $W^\perp$ e completare la base del punto i) ad una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 3.

Siano A e B sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^4$.

i) Provare che $(A + B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$. Vale l'inclusione opposta ?

ii) Sia $a = dimB$, $b = dimB$, $x = dim(A + B)^\perp$, $y = dim(A^\perp + B^\perp)$. Trovare una relazione tra a, b, x e y.

Esercizio 4.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Calcolare gli autovalori, le molteplicità algebriche e geometriche e provare che A è diagonalizzabile.

ii) Si trovi una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ è diagonale.

Prova scritta di Geometria II, Nuovo Ordinamento,
3.9.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.
A e B sono due sottoinsiemi convessi del piano euclideo. Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte.
i) Un sottoinsieme del piano si dice limitato se è contenuto in un cerchio (di centro e raggio opportuni). Se A e B sono limitati, l'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è limitato?
ii) Se A e B sono sottospazi affini, è vero che $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un sottospazio affine ?
iii) (facoltativo)L'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un insieme convesso ?

Esercizio 2.
Nello spazio euclideo consideriamo il punto $P = (2, 0, -5)$ e la retta r di equazione cartesiana $x + y - 3 = x - z + 5 = 0$.
i) Trovate il piano π passante per P e perpendicolare a r
ii) l'equazione del luogo dei punti che hanno distanza pari a 3 da π.
iii) le intersezioni di r con il luogo del punto ii).

Esercizio 3.
Nel piano euclideo si consideri la retta r di equazione $x + y = 1$ e il punto $Q = (-1, -1)$.
i) Studiare la conica data dal luogo dei punti P del piano tali che $2d(P, Q) = d(P, r)$. Dire se è a centro e in caso affermativo trovare il centro.
ii) Trovare l'intersezione della conica con il segmento tra Q e la sua proiezione ortogonale su r. In tale punto trovare la retta tangente alla conica.
iii) trovare il più piccolo rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati (se esiste) che contiene la conica.

Esercizio 4. Consideriamo nel piano complesso $\mathbf{C}$ l'applicazione $f(z) = 2iz + 3$.
i) Se T è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, descrivere $f(C)$ e calcolare $C \cap f(C)$.
ii) Se $g(z) = z/2 - 3$, classificare $g \cdot f$ e studiare il luogo dei suoi punti fissi.

Prova scritta di Geometria I e II, Nuovo Ordinamento,
3.9.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.
i) Trovare una base ortonormale del sottospazio W di $\mathbf{R}^4$ definito da $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_2+x_3+x_4 = 0\}$.
ii) Esprimere i vettori $(1, -1, 0, 1)$ e $(1, 2, -1, -1)$ come combinazione lineare della base trovata al punto i).
iii) Trovare una base ortonormale di $W^\perp$ e completare la base del punto i) ad una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 2.
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Provare che A è diagonalizzabile, calcolare gli autovalori e le molteplicità algebriche e geometriche.
ii) Si trovi una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ è diagonale.

Esercizio 3.
A e B sono due sottoinsiemi convessi del piano euclideo. Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte.
i) Un sottoinsieme del piano si dice limitato se è contenuto in un cerchio (di centro e raggio opportuni). Se A e B sono limitati, l'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è limitato?
ii) Se A e B sono sottospazi affini, è vero che $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un sottospazio affine ?
iii) (facoltativo) L'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un insieme convesso ?

Esercizio 4.
Nel piano euclideo si consideri la retta r di equazione $x + y = 1$ e il punto $Q = (-1, -1)$.
i) Studiare la conica data dal luogo dei punti P del piano tali che $2d(P, Q) = d(P, r)$. Dire se è a centro e in caso affermativo trovare il centro.
ii) Trovare l'intersezione della conica con il segmento tra Q e la sua proiezione ortogonale su r. In tale punto trovare la retta tangente alla conica.
iii) trovare il più piccolo rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati (se esiste) che contiene la conica.

Prova scritta di Geometria I, Vecchio Ordinamento,seconda parte
3.9.02
C.d.L. in Matematica, Università di Firenze

Esercizio 1.
A e B sono due sottoinsiemi convessi del piano euclideo. Rispondere alle seguenti domande giustificando le risposte.
i) Un sottoinsieme del piano si dice limitato se è contenuto in un cerchio (di centro e raggio opportuni). Se A e B sono limitati, l'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è limitato?
ii) Se A e B sono sottospazi affini, è vero che $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un sottospazio affine ?
iii) (facoltativo)L'insieme $\{ta + (1-t)b | 0 \leq t \leq 1, a \in A, b \in B\}$ è un insieme convesso ?

Esercizio 2.
Nello spazio euclideo consideriamo il punto $P = (2, 0, -5)$ e la retta r di equazione cartesiana $x + y - 3 = x - z + 5 = 0$.
i) Trovate il piano π passante per P e perpendicolare a r
ii) l'equazione del luogo dei punti che hanno distanza pari a 3 da π.
iii) le intersezioni di r con il luogo del punto ii).

Esercizio 3.
Nel piano euclideo si consideri la retta r di equazione $x + y = 1$ e il punto $Q = (-1, -1)$.
i) Studiare la conica data dal luogo dei punti P del piano tali che $2d(P, Q) = d(P, r)$. Dire se è a centro e in caso affermativo trovare il centro.
ii) Trovare l'intersezione della conica con il segmento tra Q e la sua proiezione ortogonale su r. In tale punto trovare la retta tangente alla conica.
iii) trovare il più piccolo rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati (se esiste) che contiene la conica.

Esercizio 4.
Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Calcolare gli autovalori, le molteplicità algebriche e geometriche e provare che A è diagonalizzabile.
ii) Si trovi una matrice invertibile C tale che $C^{-1}AC$ è diagonale.