Seconda prova di esonero di Geometria II modulo
C.d.L. in Matematica, Università degli studi di Firenze
3 giugno 2008
Fila A

Esercizio 1: Nel piano eulideo $\mathbb{E}^2$ si considerino le cinque rette $r_1 = \{x = 0\}$, $r_2 = \{y = 0\}$, $r_3 = \{y = 1\}$, $r_4 = \{x - y = 0\}$, $r_5 = \{x + y - 1 = 0\}$ e le loro riflessioni associate $s_i := s_{r_i}$, per $i = 1, \dots, 5$. Determinare la natura (identità, riflessione, rotazione, traslazione, glissoriflessione) di ciascuna delle seguenti isometrie:

(a) $f_1 = s_1 \circ s_5 \circ s_1$.

(b) $f_2 = s_1 \circ s_3 \circ s_5$.

(c) $f_3 = s_1 \circ s_2 \circ s_3 \circ s_5$.

(d) $f_4 = s_1 \circ s_4 \circ s_5 \circ s_3$.

Esercizio 2: Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ la conica passante per il punto $P = (2, 1)$ e tangente alle rette $r = \{x + y = 0\}$ e $s = \{x - y + 1 = 0\}$ nelle loro intersezioni con l'asse delle ordinate.

(a) Trovare l'equazione di $\mathcal{C}$.

(b) Dare la classificazione euclidea di $\mathcal{C}$.

(c) Calcolare l'area dell'interno $f(\mathcal{C})$ dove $f \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ è l'affinità

$$f(x, y) = (2x + y + 3, x + 5y - 7).$$

Esercizio 3: Nel piano proiettivo, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si considerino i punti $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$, $P_3 = [0, 0, 1]$, $P_4 = [1, t, 1 - t]$, $Q_1 = [1, 0, 0]$, $Q_2 = [2, 1, 0]$, $Q_3 = [0, 0, 2]$, $Q_4 = [1, 2, 1]$.

(a) Trovare per quali valori di t esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, \dots 4$ e discuterne l'unicità.

(b) Per $t = 2$ calcolare una proiettività tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, \dots 4$.

(c) Calcolare i punti fissi della proiettività del punto precedente.

Seconda prova di esonero di Geometria II modulo
C.d.L. in Matematica, Università degli studi di Firenze
3 giugno 2008
Fila B

Esercizio 1: Nel piano eulideo $\mathbb{E}^2$ si considerino le cinque rette $r_1 = \{x = 0\}$, $r_2 = \{y = 0\}$, $r_3 = \{y = 1\}$, $r_4 = \{x - y = 0\}$, $r_5 = \{x + y - 1 = 0\}$ e le loro riflessioni associate $s_i := s_{r_i}$, per $i = 1, \dots, 5$. Determinare la natura (identità, riflessione, rotazione, traslazione, glissoriflessione) di ciascuna delle seguenti isometrie:

(a) $f_1 = s_2 \circ s_5 \circ s_2$.

(b) $f_2 = s_5 \circ s_3 \circ s_1$.

(c) $f_3 = s_3 \circ s_5 \circ s_1 \circ s_2$.

(d) $f_4 = s_5 \circ s_3 \circ s_1 \circ s_4$.

Esercizio 2: Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ la conica passante per il punto $P = (1, 2)$ e tangente alle rette $r = \{x + y = 0\}$ e $s = \{-x + y + 1 = 0\}$ nelle loro intersezioni con l'asse delle ascisse.

(a) Trovare l'equazione di $\mathcal{C}$.

(b) Dare la classificazione euclidea di $\mathcal{C}$.

(c) Calcolare l'area dell'interno $f(\mathcal{C})$ dove $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ è l'affinità

$$f(x, y) = (2x + y + 3, x + 5y - 7).$$

Esercizio 3: Nel piano proiettivo, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, si considerino i punti $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$, $P_3 = [0, 0, 1]$, $P_4 = [t, 1 - t, 1]$, $Q_1 = [1, 0, 0]$, $Q_2 = [2, 1, 0]$, $Q_3 = [0, 0, 2]$, $Q_4 = [1, 2, 1]$.

(a) Trovare per quali valori di t esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, \dots 4$ e discuterne l'unicità.

(b) Per $t = 2$ calcolare una proiettività tale che $f(P_i) = Q_i$, per $i = 1, \dots 4$.

(c) Calcolare i punti fissi della proiettività del punto precedente.