1 DICEMBRE 1998
1^a PROVA DI ESONERO DI GEOMETRIA 1
LAUREA E DIPLOMA IN MATEMATICA – A.A.1998/99

1] Dato $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$, sia $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$; si indichi poi $V_b := \{f \in \mathbf{R}_3[x] | f'(b) = 0\}$ al variare di $b \in \mathbf{R}$ e con $W := \{f \in \mathbf{R}_3[x] | a_1 + a_2 = 0\}$. Calcolare, al variare di $b \in \mathbf{R}$, la dimensione e una base di $V_b \cap W$.

2] Dati $h, k \in \mathbf{R}$ si consideri la matrice

$$A_{h,k} = \begin{bmatrix} 1 & 2h & 1 & 1 \\ 1 & 2h & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 2h & 2h & 2h \end{bmatrix}$$

a) Determinare, se esistono, i valori $h, k \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker A_{h,k}$

b) Determinare dimensione e base di $Ker A_{1,2}$ e di $Im A_{1,2}$.

c) Trovare delle equazioni parametriche per $Ker A_{1,1}$ e delle equazioni cartesiane per $Im A_{1,1}$.

d) Determinare $dim Ker A_{h,-1}$ al variare di h.

3] Sia $M = (m_{i,j})$ una matrice $m \times n$ di rango 1. Provare che esistono delle funzioni $f : \{1, 2, ..., m\} \to \mathbf{R}$ $g : \{1, 2, ..., n\} \to \mathbf{R}$ tali che $m_{i,j} = f(i)g(j)$. f, g sono uniche ?