GEOMETRIA I, corso di laurea in Matematica
Compito del 1 febbraio 2011, A.A. 2010-2011

NOME E COGNOME:

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTO FOGLIO:

1) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Dire per quali valori di s e $t \in \mathbf{R}$, si ha che $\begin{pmatrix} t \\ s \\ 3t+s \\ s \end{pmatrix}$ appartiene allo spazio generato dalle colonne di A.

ii) Trovare una base di $Ker(f_A)$.

iii) Trovare $M_{\mathcal{A},\mathcal{P}}(f_A)$, dove $\mathcal{A} = \{e_1 + e_2, e_1, e_3 + e_4, e_3\}$, $\mathcal{P} = \{e_4, e_3, e_2, e_1\}$

iv) Trovare, se esiste, un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tale che $Im(g) = Im(f_A)$ e $Ker(g) = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4 \rangle$.

2) SCRIVERE IL PROCEDIMENTO, MOTIVARE LE RISPOSTE

Sia n un numero naturale maggiore o uguale a 1. Dimostrare che

$$rg(A) + rg(B) \geq rg(A|B) \geq max\{rg(A), rg(B)\}$$

$\forall A, B \in M(n \times n, \mathbf{R})$.

.

NOME E COGNOME

PUNTEGGIO OTTENUTO IN QUESTA PAGINA:

3) **DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO.**
Si consideri la forma bilineare $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$b(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1.$$

Dire se f è un prodotto scalare oppure no. In caso affermativo si esibisca una base ortonormale rispetto ad b. Altrimenti si fornisca un controesempio ad una delle proprietà dei prodotti scalari.

4) DARE SOLO LA RISPOSTA FINALE SENZA IL PROCEDIMENTO
Sia r la retta in $\mathbb{A}^2$ di equazione $2x + y = 1$.

(a) Scrivere la matrice completa della simmetria s_r associata ad r.

(b) Calcolare l'equazione cartesiana di $s_r(t)$ dove t e la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \end{cases}$$

5) MOTIVARE LE RISPOSTE, DESCRIVERE IL PROCEDIMENTO.
Nei seguenti tre casi, stabilire se esiste una glissoriflessione $f\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ tale che $f(S) \subset S$.

(a) $S = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ dove $P_1 = (1, 1), P_2 = (-1, 1), P_3 = (-1, -1), P_4 = (1, -1)$.

(b) $S = r_1 \cup r_2$ dove r_1, r_2 sono le rette di equazione $r_1 : x = -1$ e $r_2 : x = 1$.

(c) S dato dai punti della conica di equazione $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Per ciascuno dei tre casi motivare la risposta: in caso affermativo esibire una tale glissoriflessione; in caso negativo dimostrare che non esiste.