

Elvira Mascolo

Università di Firenze, Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze, Italia
email: mascolo@math.unifi.it, web: www.math.unifi.it/mascolo

Appunti di Analisi Funzionale

1 settembre 2020

*A theory is the more impressive,
the simpler are its premises, the
more distinct are the things it
connects, and the broader is its
range of applicability*

Albert Einstein

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Cenni Storici	3
1.2	Argomenti Trattati	7
2	Teorema di Hahn-Banach	11
2.1	Spazi normati e Spazi Duali	11
2.2	Teorema di Hahn-Banach	16
2.3	Spazi normati riflessivi	20
2.4	Problema della minima norma e teoria della dualità	21
2.5	Forme geometriche del teor. di Hahn-Banach	25
3	Principi di Analisi Lineare	31
3.1	Operatori Lineari	31
3.2	Lemma di Baire	35
3.3	Teorema di Banach-Steinhaus	38
3.4	Teorema dell'applicazione aperta	43
3.5	Teorema del grafico chiuso	47
4	Topologie deboli in spazi normati	51
4.1	Introduzione alle topologie deboli	51
4.2	Topologia debole $\sigma(X, X^*)$	53
4.3	Topologia debole $\ast \sigma(X^*, X)$	61
4.4	Spazi L^p e Topologie deboli	63

4.5	Funzioni test e mollificatori	71
4.6	Integrazione Numerica e convergenza debole	76
4.7	Appendice	80
5	Spazi di Hilbert ed Applicazioni	83
5.1	Spazi di Hilbert	83
5.2	Teorema della Proiezione	86
5.3	Forme Bilineari e Teorema di Stampacchia	95
5.4	Sistemi ortonormali	102
5.5	Basi Hilbertiane	108
5.6	Metodo di Galerkin	111
6	Spazi di Sobolev in una dimensione	115
6.1	Introduzione alla formulazione variazionale	115
6.2	Derivate Deboli	117
6.3	Spazi di Sobolev	120
6.4	Rapporti incrementali	125
6.5	Teoremi di immersione	128
6.6	Proprietà delle derivate deboli	132
6.7	Lo spazio $W_0^{1,p}$	133
6.8	Convergenza debole in $W^{1,p}$	136
6.9	Formulazione variazionale di problemi ai limiti	137
6.10	Procedimento dei Metodi Diretti	143
6.11	Risultato di regolarità	146
7	Spazi di Sobolev in R^n	149
7.1	Spazi di Sobolev in R^n	149
7.2	Teoremi di immersione	153
7.3	Convergenza debole in $W^{1,p}$	156
7.4	Formulazione variazionale di problemi ellittici	157
7.5	Risoluzione del problema modello con il metodo di Galerkin . .	161
8	Teoremi di punto fisso	163
8.1	Breve storia dei Teoremi di punto fisso	163
8.2	Teorema del punto fisso di Banach	165

8.3	Applicazioni alle equazioni algebriche lineari	170
8.4	Applicazioni alle equazioni differenziali	173
8.5	Applicazioni alle equazioni integrali	175
8.6	Il teorema del punto fisso di Brouwer	178
8.7	Dimostrazione del Teorema di Brouwer	179
8.8	Teorema del punto fisso di Schauder	182
8.9	Il teorema del punto fisso di Schaefer	187
8.10	Applicazione del Teorema di Schaefer alle equazioni differenziali a derivate parziali non lineari	188
9	BIBLIOGRAFIA	193

Capitolo 1

Introduzione

Lo studio delle funzioni reali è stato sviluppato nel Calcolo differenziale classico da Newton, Leibnitz e sistemato in modo organico da Weierstrass e Cauchy.

I problemi principali attorno a cui si sviluppano le ricerche degli analisti verso la fine dell'Ottocento sono la risoluzione delle equazioni differenziali e i problemi di massimo e di minimo di funzionali del Calcolo delle Variazioni. In entrambi i casi le incognite non sono numeri ma funzioni e diventa quindi indispensabile lo studio delle trasformazioni ed operatori che agiscono su insiemi di funzioni.

Vediamo cosa si intende per un problema di Calcolo delle Variazioni.

Assegnata $f = f(x, s, z)$ definita in $[a, b] \times R \times R \rightarrow R$, ad ogni funzione $u : [a, b] \rightarrow R$, corrisponde un numero reale $I(u)$ definito come

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx.$$

Il problema consiste nel determinare l'estremo superiore o inferiore di $I(u)$, quando u appartiene alla classe di funzioni ammissibili $\mathbf{U}$, e nella ricerca dell'eventuale punto di minimo o di massimo, cioè stabilire l'esistenza di una funzione $u_0 \in \mathbf{U}$ tale che

$$I(u_0) \leq I(u) \quad (I(u_0) \geq I(u)) \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Lo studio di un'equazione differenziale offre un'altro esempio di classe di operatori su classi funzionali. Assegnate p, q funzioni definite e continue in un intervallo $[a, b]$ di R , $L : u \rightarrow Lu$ definito da

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x)$$

definisce un operatore che agisce su una funzione $u = u(x)$ dotata di derivata prima e seconda continue e la trasforma nella funzione continua

$$L(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u + c(x)$$

Assegnata una funzione continua f , risolvere l'equazione differenziale, associata all'operatore L significa determinare la funzione u_0 tale che $L(u_0) = v$.

Come ultimo esempio, consideriamo l'operatore integrale della forma:

$$T(u)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

dove $K = K(x, y)$ è una funzione assegnata in $[a, b] \times [a, b]$, che agisce sulla funzione continua u trasformandola in una nuova funzione.

Assegnata una funzione continua g , risolvere l'equazione integrale significa determinare u_0 tale che $T(u_0) = g$.

In questa direzione alla fine del 1800 nasce e si sviluppa una nuova teoria, chiamata Analisi Funzionale dal matematico francese Hadamard.

La creazione dell'Analisi Funzionale è stata motivata dall'idea che i tre problemi, del tipo precedente, possano essere interpretati attraverso una comune formulazione astratta interpretandoli come *operatori* che agiscono su un'opportuna classe di funzioni.

Gli operatori trasformano elementi di uno spazio in elementi dello stesso spazio o differente ed introducendo un'opportuna struttura topologica e lineare a tali spazi si possono determinare le proprietà dell'operatore in esame, che permettono poi di stabilire l'esistenza delle soluzioni dei problemi ad essi associati.

Nel calcolo delle variazioni gli operatori hanno valori nell'insieme dei numeri reali e questi operatori vengono chiamati Funzionali, mentre il termine operatore è riservato alle trasformazioni tra classi di funzioni.

Il primo passo che bisogna compiere per strutturare lo spazio delle funzioni è quello di fissare un metodo per misurare la distanza tra una funzione ed un'altra. In termini matematici quando si introduce una distanza parliamo di spazi metrici, ad esempio gli spazi R o R^n sono spazi metrici con la distanza euclidea.

Vi sono vari modi di misurare la distanza tra due funzioni e quindi la definizione di distanza non è univoca ma dipende dal contesto in cui viene introdotta.

A titolo d'esempio, consideriamo la distanza ottenuta attraverso lo scarto massimo tra le due funzioni continue f, g su un intervallo $[a, b]$ si definisce la distanza tra f e g come

$$d(f, g) = \text{Sup} \{|f(x) - g(x)|, x \in [a, b]\} \quad (1.0.1)$$

che, a norma del teorema di Weierstrass, è sempre definita e verifica le tre proprietà delle distanze: simmetrica, triangolare e $d(f, g) = 0$ se e solo se $f = g$.

L'insieme delle funzioni continue su un intervallo $[a, b]$ è quindi uno spazio metrico e si possono applicare tutte le considerazioni relative a questi spazi. In particolare si tratta di spazi topologici ed è quindi possibile introdurre il concetto di intorno di un punto e di continuità degli operatori.

Lo spazio delle funzioni continue ha anche una struttura lineare infatti si verifica facilmente che è uno spazio vettoriale su R , si tratta quindi di **spazio vettoriale topologico ed in particolare metrico**.

In spazi di funzioni si può definire una norma che determina a sua volta una distanza.

In particolare lo spazio metrico delle funzioni continue determinato dalla distanza (1.0.1) è anche uno spazio normato, con la norma definita da:

$$\|f\| = \text{Sup} \{|f(x)|, x \in [a, b]\}$$

Il grande contributo dei matematici del XX secolo è stato quello di studiare la struttura geometrica e topologica degli spazi in cui gli elementi sono funzioni ed in cui si possono trasferire molti concetti della geometria elementare.

Molte delle proprietà degli spazi euclidei si estendono a spazi di funzioni ma in generale quest'ultimi non sono a dimensione finita e di conseguenza vengono meno certe proprietà vere in dimensione finita, come la completezza degli spazi rispetto alle norme, l'equivalenza delle norme su uno stesso sostegno ed infine alcune questioni di compattezza: gli insiemi chiusi e limitati in norma non sono in generale compatti.

1.1 Cenni Storici

La teoria astratta dei funzionali viene avviata da Vito Volterra (1860-1940) intorno alla fine dell'Ottocento nel corso delle sue ricerche su questioni concernenti il Calcolo delle Variazioni e sulle equazioni integrali. Tuttavia, anche prima che Volterra cominciasse il suo lavoro, l'idea di strutturare un insieme di funzioni definite in uno stesso intervallo era già presente nella tesi di laurea di Riemann. Anche Giulio Ascoli (1843-1896) e Cesare Arzelà (1842-1912) tentarono di estendere agli insiemi di funzioni la Teoria di Cantor relativa agli insiemi di punti. Le ricerche di Volterra possono essere considerate l'inizio e la base teorica dell'analisi funzionale. Tuttavia, Volterra fu sempre estremamente interessato alle possibili applicazioni dei suoi risultati in problemi concreti ed ha sempre di fatto rimandato lo studio degli aspetti puramente teorici.

Fu J. Hadamard (1865-1963) che al Primo Congresso Internazionale di Matematica nel 1897 a considerare insieme i cui elementi non fossero necessariamente numeri ma elementi di natura arbitraria come le curve.

Intorno alla fine dell'Ottocento David Hilbert (1862-1943) uno dei più grandi matematici di tutti i tempi, che aveva già dato contributi importanti sui numeri algebrici e i fondamenti della geometria, volse la sua attenzione alle equazioni integrali.

Nella relazione tenuta al IV Congresso dei matematici di Roma nel 1908, Hilbert sottolineò esplicitamente le profonde connessioni tra algebra, geometria ed analisi poste in luce dal suo particolare approccio alla teoria delle equazioni integrali.

L'algebra tratta un numero finito di incognite che soddisfano un numero finito di relazioni mentre l'analisi si trovava a dover considerare questioni dove le incognite erano infinite e soddisfacevano relazioni e vincoli di tipo integrale e differenziale. Per Hilbert i problemi dell'algebra e dell'analisi dovevano quindi fondersi ed essere compresi nella più generale questione di studiare problemi con infinite incognite soggette ad infinite relazioni.

Nelle sue ricerche sulle equazioni integrali Hilbert individua le funzioni assegnate attraverso i suoi coefficienti di Fourier in uno sviluppo rispetto ad successione ortonormale di funzioni, senza considerare tuttavia questa successione come sistema di coordinate di un punto in uno spazio.

Il primo passo di astrazione nella traduzione di concetti e nozioni dalla visione finito dimensionale a quella infinita, venne fatto da Frechet e E. Schmidt (1876-1959), considerando in particolare le successione (x_n) e le funzioni come punti di uno spazio ad infinite dimensioni.

Tuttavia, il primo tentativo significativo di costruire una teoria astratta degli spazi funzionali venne compiuta da Maurice Frechet (1878-1973) nella sua tesi di dottorato nel 1906, che ebbe un'importanza enorme non solo nello sviluppo dell'analisi funzionale ma di tutta la moderna topologia.

Frechet tentò di riunificare in termini astratti le idee contenute in Cantor, Volterra, Arzelà, Hadamard, e Hilbert, introducendo negli spazi di funzioni le proprietà topologiche di intorno, limite di successione e anche di metrica.

Gli esempi presentati in quegli anni furono spazi vettoriali a dimensione infinita come lo spazio delle funzioni continue e lo spazio delle successioni di numeri reali.

Più precisamente, viene introdotto lo spazio delle successioni tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

è si dimostra che esso è dotato di un prodotto scalare dato da

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Da allora uno spazio con le stesse proprietà viene detto spazio di Hilbert.

Intorno a quegli anni sia Schmidt che Frechet osservarono che lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile (integrale nel senso di Lebesgue) ha la stessa geometria dello spazio di Hilbert delle successioni.

Inoltre Frechet stabiliva un teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui su L^2 : per ogni funzionale F lineare e continuo esiste una unica funzione u tale che per ogni $v \in L^2$:

$$F(v) = \int_a^b v(x)u(x).$$

Frechet studiò anche i funzionali su spazi di funzioni ed il loro differenziale. La definizione di differenziale venne poi precisata dalle ricerche di Albert Fischer (1894-1922) e Elizabeth Le Stourgeon (1881-1971).

La parte centrale delle ricerche in analisi funzionale fu rivolta alla risoluzione delle equazioni differenziali ed integrali attraverso lo studio di operatori che che operano su spazi a dimensione infinita.

L'inizio delle ricerche in questo campo è dovuto a F. Riesz (1880-1956) ma le definizioni generali e lo studio sistematico è dovuto a Stefan Banach (1884-1945), Hans Hahn (1879-1934), Eduard Helly (1884-1943) e Norbert Wiener (1894-1964).

È difficile risolvere questioni di priorità nelle ricerche di questi scienziati, tuttavia va riconosciuto che è stato il lavoro di Banach, ispirato ai lavori dei matematici italiani e francesi, ad avere maggiore influenza.

Il tratto distintivo di Banach fu di determinare uno spazio dotato di una norma, ma non definita attraverso un prodotto scalare. L'introduzione degli spazi normati permise di considerare gli spazi delle successioni x_n tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

con $p > 1$, $p \neq 2$ ed anche le funzioni con potenza p -sima sommabile, denotato con L^p . Lo spazio viene chiamato di Banach se la norma stabilisce una metrica completa. Inoltre, Banach introduce la classe dei funzionali su uno spazio normato e ne stabilisce le proprietà. L'idea venne anche introdotta da Hahn ma ancora una volta il lavoro di Banach è più esauriente. Il teorema di prolungamento sui funzionali lineari, noto come teorema di Hahn-Banach, ha avuto grande importanza nelle applicazioni.

Le ricerche di Banach rappresentano la sintesi di una serie di metodi emersi in diversi contesti nei lavori degli analisti nei precedenti venti anni. La teoria

dell'analisi funzionale si presentava come una teoria autonoma, di cui la rassegna di problemi aperti che erano stati individuati da Banach, dimostrava i possibili sviluppi.

Intorno al 1920 la teoria degli spazi di funzioni e degli operatori, sembrò tuttavia dirigersi verso l'astrazione ed in realtà anche Banach non diede molto peso alle possibili applicazioni delle sue ricerche. In questa direzione ricordiamo l'osservazione fatta da Hermann Weyl (1885-1955):

Non fu per merito ma solo per caso che si scoprì che la teoria degli spazi di Hilbert era lo strumento matematico adatto alla meccanica quantistica.

Infatti, quando Hilbert sembrava aver perso interesse alle equazioni differenziale ed integrali e stava rivolgendo la sua attenzione ai fondamenti della matematica, le ricerche su questi argomenti furono ripresi da John von Neumann (1903-1957), che nel 1927 pubblicò alcuni risultati sugli operatori non limitati e che erano preceduti da una presentazione assiomatica degli spazi di Hilbert basata sulla nozione di prodotto scalare. John von Neumann caratterizzava gli spazi di Hilbert con cinque assiomi: spazio vettoriale, esistenza di un prodotto interno, separabilità, esistenza di infiniti elementi linearmente indipendenti, completezza.

Le sue ricerche si rivelarono di estrema importanza nelle applicazioni in meccanica quantistica e inoltre contribuirono in modo essenziale a conferire all'analisi funzionale la sua dimensione moderna ed applicata.

L'opera definitiva sulla teoria dei funzionali richiesta per il Calcolo delle Variazioni è invece dovuta a Leonida Tonelli (1885-1946) intorno al 1920. La teoria classica era basata sulla condizione necessaria di Euler-Lagrange, la nuova teoria, introdotta da Tonelli nel 1925, e detta dei Metodi Diretti, assicura l'esistenza di minimi attraverso la nozione di semicontinuità inferiore.

Importante è anche l'opera di Hausdorff (1868-1942) che segnò la nascita della moderna topologia generale come disciplina autonoma. Le sue ricerche si basarono sulla determinazione degli intorni, aperti e chiusi in insiemi di natura generale. Hausdorff introdusse inoltre il concetto di dimensione frazionaria, che all'epoca passò inosservato, ma che ha rivelato tutta la sua importanza nella geometria dei frattali elaborata da B. Mandelbrot nella metà del 1970.

Bisogna osservare che probabilmente il grado di generalizzazione e di astrazione rappresenta l'aspetto predominante della matematica del XX secolo, tuttavia le nozioni astratte stabilite e studiate in questo periodo hanno poi svolto un ruolo fondamentale nella ricerca applicata. Negli ultimi 50 anni lo sviluppo dell'analisi funzionale, diversificandosi in molteplici direzioni, ha finito per interessare tutti gli aspetti della matematica e della fisica teorica.

Un nuovo e decisivo impulso all'analisi funzionale venne a partire da 1936 dalle ricerche di un fisico matematico russo S. Sobolev (1908-1989) sui fondamenti

di una nuova teoria, detta delle distribuzioni, che generalizzava il concetto di funzione e che era connessa con la meccanica quantistica. Le ricerche partivano dalla cosiddetta *funzione δ di Dirac* con le proprietà :

$$\delta(x) = 0, \quad \text{per } x \neq 0 \quad \int \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0).$$

Sobolev, introdusse una nuova classe di spazi che portano il suo nome, costituiti da funzioni con potenza p -sima sommabile, che sono dotati di un tipo particolare di derivata debole, che appartengono alla stessa classe di funzioni.

Nel 1945 il matematico francese L. Schwartz, basandosi sulle ricerche di Sobolev e sulla teoria degli spazi topologici lineari localmente convessi, riuscì a costruire una teoria, teoria delle distribuzioni, in cui non solo trovava rigorosa sistemazione la funzione δ di Dirac, ma poneva su nuovi basi la teoria delle equazioni differenziali ordinarie ed a derivate parziali.

Concludiamo questa breve introduzione storica con una famosa frase di Hilbert, che sembra adattarsi perfettamente con lo sviluppo della teoria dell'analisi funzionale:

*Nella storia di ogni teoria matematica si possono distinguere tre fasi:
quella creativa, quella formale ed infine quella critica.*

1.2 Argomenti Trattati

Uno spazio vettoriale X in cui si definisce una norma $\|\cdot\|$ viene denominato spazio normato. Ogni norma definisce una distanza $d(x, y) = \|x - y\|$. Se rispetto a questa distanza vale la condizione di Cauchy, lo spazio normato viene chiamato spazio di Banach. Molte delle topologie introdotte negli spazi di funzioni possono essere interamente studiate facendo ricorso alle successioni, infatti se lo spazio è normato la compattezza è equivalente alla compattezza per successioni.

Introdotti gli operatori tra spazi normati si studiano quelli che possiedono la proprietà lineare: Un operatore tra spazi normati $T : X \rightarrow Y$ si dice lineare se

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Si definisce funzionale in X un'applicazione $F : X \rightarrow R$.

Dato uno spazio normato X si definisce spazio duale lo spazio dei funzionali lineari e continui su X . Lo spazio duale X^* di uno spazio X è ancora uno spazio normato ed sempre uno spazio di Banach.

Il teorema principale per i funzionali lineari è quello di Hahn-Banach da cui si deduce come prima conseguenza, che dato uno spazio normato non banale non è banale nemmeno il suo spazio duale.

Il teorema di Hahn-Banach e le sue conseguenze sono studiate nel Capitolo 2.

Quando gli spazi sono completi allora si hanno i Teoremi di Banach-Steinhaus, che stabilisce che per operatori lineari, la limitatezza puntuale implica quella uniforme e come conseguenze il teorema dell'applicazione aperta e del grafico chiuso. Questi due teoremi hanno numerose applicazioni nella risoluzione delle equazioni differenziali lineari. Alla base di questi risultati vi è il Lemma di Baire o delle categorie.

Questi principi che sono alla base dell'analisi degli operatori lineari, sono illustrati nel Capitolo 3.

Facendo agire sulle successioni di uno spazio normato gli elementi dello spazio duale si introduce la nozione di convergenza debole, che permette di estendere in dimensione infinita alcuni importanti risultati che non sono veri rispetto alla convergenza in norma, detta convergenza forte. Questo tuttavia è possibile se lo spazio è riflessivo, cioè può essere identificato in modo canonico con lo spazio duale del suo duale.

In particolare vale che se una successione è limitata in norma allora ha un'estratta che converge debole. Vale inoltre, utilizzando un teorema di separazione dei convessi (formulazione geometrica del Teorema di Hahn-Banach) che se un insieme convesso è chiuso nella topologia forte è chiuso anche rispetto a quella debole.

Un insieme convesso chiuso e limitato nella norma è debolmente compatto.

Lo studio delle topologie deboli con particolare riferimento al caso degli spazi delle funzioni sommabili L^p sono presentate nel Capitolo 4.

Quando la norma di uno spazio è associata ad un prodotto scalare, lo spazio gode di proprietà geometriche analoghe a quelle dello spazio euclideo. In uno spazio normato si misurano le distanze ma non gli angoli, questo è invece possibile negli spazi dotati di un prodotto scalare. In particolare se lo spazio è completo, si dice che è uno spazio di Hilbert.

In uno spazio di Hilbert si ha che ogni vettore è dotato di proiezione su qualunque sottoinsieme chiuso e convesso e quindi in particolare su qualunque sottospazio chiuso. Come conseguenza si ha che ogni spazio di Hilbert può essere identificato con il suo duale (come avviene per gli spazi a dimensione finita) attraverso l'isomorfismo di Riesz.

Il teorema della proiezione si estende alle forme bilineari e si ottiene il Teorema di Lax-Milgram, che gioca un ruolo fondamentale nello studio delle equazioni

differenziali.

Il Capitolo 5 contiene lo studio delle proprietà degli Spazi di Hilbert.

Infine si introduce la nozione di derivata debole e gli spazi di funzioni di classe L^p con derivata debole ancora in L^p . Questi spazi introdotti intorno al 1930, hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo dei metodi di risoluzione delle Equazioni Differenziali in particolare attraverso il cosiddetto metodo variazionale o formulazione debole dell'equazione. La teoria degli spazi di Sobolev ed il metodo variazionale in una dimensione viene presentato nel Capitolo 6. Nel Capitolo 7 si considera il caso di dimensione ≥ 2 .

Il Capitolo 8 è dedicato ai teoremi di punto fisso: data una funzione $F : X \rightarrow X$ in un insieme X , si dice che x_0 è un punto fisso di F se $F(x_0) = x_0$.

I teoremi di punto fisso hanno molteplici applicazioni nello studio dell'esistenza di soluzioni di equazioni differenziali che con opportune trasformazioni può essere ridotta alla ricerca di un punto fisso di un opportuno operatore.

In particolare si considera il teorema delle contrazioni di Banach, il teorema di Brouwer per funzioni continue definite in convessi compatti di R^n e le generalizzazioni a spazi di dimensione infinita dovuta a Schauder ed infine il teorema del punto fisso di Schaefer e le sue applicazioni nello studio delle equazioni alle derivate parziali non lineari.

Capitolo 2

Teorema di Hahn-Banach

2.1 Spazi normati e Spazi Duali

Sia X uno spazio vettoriale su R . Diremo che in X è definita una norma se esiste un' applicazione $x \in X \rightarrow \|x\| \in R_+$ tale che

- $\|x\| > 0$ per ogni $x \in X$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$.
- $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è chiamato spazio normato. In uno spazio normato è definita la distanza

$$d(x, y) = \|x - y\| .$$

quindi X è uno spazio topologico metrico.

Sia (x_n) una successione contenuta in X diremo che converge a x_0 nella norma di X quando

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = 0.$$

Osserviamo che una metrica indotta da una norma ha alcune proprietà di invarianza:

Per ogni x, y, z in X si ha:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y),$$

ed inoltre per ogni α reale

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y).$$

Diremo che X è uno spazio di Banach quando è completo rispetto alla sua norma.

Si verifica facilmente che

- R con il valore assoluto è uno spazio normato completo. R^n è uno spazio normato di Banach con la norma euclidea

$$\|x\| = \left(\sum_{1..n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Lo spazio vettoriale $C^0([a, b])$ delle funzioni definite e continue sull'intervallo $[a, b]$ è uno spazio normato completo con la norma

$$\|f\|_{C^0} = \text{Max } |f(x)|.$$

Lo spazio $C^0([a, b])$ ha dimensione infinita, infatti per ogni k le funzioni $1, x, x^2, \dots, x^k$ sono linearmente indipendenti. Infatti in caso contrario, esisterebbe un polinomio di grado k , a coefficienti non tutti nulli, che si annullerebbe per ogni $x \in [a, b]$, contro il teorema fondamentale dell'algebra che afferma che un tale polinomio può avere al più k radici.

- Lo spazio vettoriale $C^0([a, b])$ con la norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(x)| dx,$$

è ancora uno spazio normato.

- Sia $p \geq 1$ fissato, indichiamo con l^p lo spazio vettoriale delle successioni reali $x = (\xi_n)$ tali che $\sum |\xi_n|^p < +\infty$.

Lo spazio l^p è uno spazio normato con la norma

$$\|x\|_{l^1} = \left(\sum |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotiamo con l^∞ lo spazio delle successioni limitate di numeri reali $x = (\xi_n)$ tali che $|\xi_n| \leq C_x$ con C_x dipendente da x ma non da n .

La norma in l^∞ è data da

$$\|x\| = \sup_{n \in N} |\xi_n|$$

Si prova facilmente che l^∞ e l^p , con $p \geq 1$, sono spazi di Banach.

Osserviamo che un sottospazio di uno spazio normato completo è ancora completo se e solo se è chiuso.

Due norme in uno stesso spazio X si dicono equivalenti se esistono due costanti positive a, b tali che:

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

Negli spazi a dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Il risultato è falso negli spazi a dimensione infinita. Ad esempio in $C^0([a, b])$ le norme $\|f\|_{C^0}$ e $\|f\|_{L^1}$ non sono equivalenti. Vale infatti che

$$\|f\|_{L^1} \leq (b-a)\|f\|_{C^0}$$

ma non la disuguaglianza opposta.

Ad esempio, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n(x - a) & x \in [a, a + \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [a + \frac{1}{n}, b] \end{cases}$$

è tale che $\|f_n\|_{L^1} \leq \frac{1}{2n}$ e $\|f_n\|_{C^0} = 1$.

Ricordiamo che uno spazio normato X si dice **separabile** se esiste un insieme numerabile denso in X .

Dato uno spazio normato X si definisce funzionale lineare in X un'applicazione $F: X \rightarrow R$ tale che:

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y).$$

Osserviamo che per i funzionali lineari si adoperano indifferentemente le seguenti notazioni:

$$F(x) = Fx = \langle F, x \rangle.$$

Vale la seguente proprietà

PROPOSIZIONE 2.1. — Un funzionale lineare è continuo in X se e solo se è limitato in un intorno di 0.

Dimostrazione. Sia F un funzionale lineare e continuo in X , ovviamente $F(0) = 0$, allora esiste un intorno dello 0 in cui $F(x) < \epsilon$.

Supponiamo che esista $I(0, \delta)$ intorno dello 0, in cui F è limitato, esiste M tale che $|F(x)| \leq M$ per ogni $x \in I(0, \delta)$, allora per ogni $y \in \frac{\epsilon}{M}I$ segue:

$$|F(y)| = \frac{\epsilon}{M}|F(x)| < \epsilon,$$

quindi F è continuo in 0.

Si ha inoltre che se F è continuo in 0 è continuo in ogni altro punto x_0 di X . Infatti se $|F(x)| < \epsilon$ per ogni x in un intorno di $I(0, \delta_\epsilon)$ di 0, si ha che per ogni $z \in x_0 + I(0, \delta_\epsilon)$

$$|F(z) - F(x_0)| = |F(z - x_0)| = |F(x)| < \epsilon,$$

quindi la continuità in x_0 .

Dal teorema precedente segue che un funzionale lineare è continuo se e solo se i suoi valori nella sfera unitaria sono limitati e vale

$$|F\left(\frac{x}{\|x\|}\right)| \leq M \Rightarrow |F(x)| \leq M\|x\|, \quad x \neq 0$$

Ad esempio

- In R^n il funzionale $F(x) = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i x_i$ per $\alpha \in R^n$ è un funzionale lineare e continuo, in quanto limitato.
- I seguenti funzionali:

$$F_1(f) = \int_a^b f(t) dt,$$

$$F_2(f) = \int_a^b g(t) f(t) dt,$$

con g funzione assegnata e continua, sono lineari e continui in $C^0([a, b])$.

- Consideriamo l^2 e sia $a = (\chi_n) \in l^2$ assegnato, allora il funzionale definito per ogni $x = (\xi_n) \in l^2$ da:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \chi_n,$$

è un funzionale lineare e continuo, infatti

$$|F(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \chi_n| \leq \|x\| \|a\|.$$

L'insieme dei funzionali lineari e continui su X costituiscono uno spazio vettoriale e inoltre è uno spazio normato munito della norma

$$\|F\|_1 = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)|.$$

La norma precedente è equivalente alla seguente:

$$\|F\|_2 = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|}.$$

Infatti, per ogni $x \neq 0$

$$\frac{|F(x)|}{\|x\|} = |F(\frac{x}{\|x\|})|,$$

e quindi $\|F\|_2 \leq \|F\|_1$.

Dal fatto che F è limitato e dalla definizione di $\|F\|_2$ segue che per ogni $x \in X$

$$|F(x)| \leq \|F\|_2 \|x\|,$$

allora per x con $\|x\| \leq 1$

$$|F(x)| \leq \|F\|_2 \|x\| \leq \|F\|_2.$$

Lo spazio normato dei funzionali lineari e continui su uno spazio normato X si chiama *spazio duale* di X e si denota con X^* .

Esempio 2.1 Consideriamo il funzionale in $C^0([a, b])$, definito da

$$\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$$

, per ogni funzione continua f definita su $[a, b]$ con $t_0 \in [a, b]$.

Si vede facilmente che si tratta di un funzionale lineare e continuo ed inoltre

$$|\delta_{t_0}(f)| \leq \|f\|_{C^0},$$

quindi $\|\delta_{t_0}\| \leq 1$. Considerando $f = 1$, si ha $\|\delta_{t_0}\| = 1$.

Vale il seguente teorema

TEOREMA 2.1. — **Lo spazio duale di uno spazio normato è uno spazio completo.**

Dimostrazione. Sia (F_n) una successione di Cauchy in X^* cioè per ogni ϵ esiste n_0 tale che per $n, m > n_0$ si ha $\|F_n - F_m\| < \epsilon$ e quindi

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq \|F_n - F_m\| \|x\| < \epsilon \|x\| \quad (2.1.1)$$

La successione di numeri reali $(F_n(x))$ è quindi di Cauchy in R e quindi converge a $F_0(x)$. Resta quindi definito un funzionale $F_0 : X \rightarrow R$, da altra parte da (2.1.1) passando al limite per $m \rightarrow +\infty$, si ha che per $n \leq n_0$

$$|F_n(x) - F_0(x)| < \epsilon \|x\|.$$

Da quest'ultima relazione segue che $F_0 : X \rightarrow R$, risulta lineare e continuo in X

$$|F_0(x)| \leq (\|F_{n_0}\| + \epsilon) \|x\|,$$

e F_n converge a F_0 in X^* .

OSSERVAZIONE 2.1. — *A titolo d'esempio diamo la costruzione dello spazio duale di R^n . Sia $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonica in R^n . Ogni vettore di R^n si scrive nella forma $v = \sum_{1, \dots, n} v^i e_i$. A partire dalla base canonica si definiscono n elementi di $(R^n)^*$, $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ mediante le relazioni*

$$F_i(v) = v^i.$$

È facile controllare che F_i sono funzionali lineari e continui e costituiscono un sistema linearmente indipendente, infatti se $F = \mu_1 F_1 + \dots + \mu_n F_n = 0$, segue che $F(e_i) = \mu_i = 0$.

Proviamo che costituiscono una base per $(R^n)^$. Sia $F \in R^n$ e sia $a_i = F(e_i)$ per $v \in R^n$ si ha*

$$F(v) = \sum_{1, \dots, n} v^i F(e_i) = \sum_{1, \dots, n} v^i a_i = \sum_{1, \dots, n} a_i F_i(v),$$

segue che $F = \sum_{1, \dots, n} a_i F_i$ in $(R^n)^$.*

La base duale $(F_1, \dots, F_n)$ viene indicata con $(dx_1, \dots, dx_n)$.

Si conclude che lo spazio duale di uno spazio a dimensione finita n è ancora a dimensione n .

2.2 Teorema di Hahn-Banach

Il teorema di estensione di Hahn-Banach è il più importante risultato relativo alla struttura dei funzionali lineari e continui sugli spazi vettoriali. Si tratta di un fondamentale principio di esistenza in Analisi Funzionale dimostrato in modo indipendente da Hahn nel 1926 e da Banach nel 1929. Il teorema garantisce che uno spazio normato possiede “abbastanza” funzionali lineari e continui e rende quindi possibile un'opportuna teoria degli spazi duali.

TEOREMA 2.2. — *Sia X uno spazio vettoriale e $p : X \rightarrow R$ un'applicazione tale che*

- $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \lambda > 0,$
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y).$

Sia G un sottospazio vettoriale di X e $g : G \rightarrow R$ lineare tale che

$$g(x) \leq p(x), \quad (2.2.2)$$

allora esiste un funzionale lineare F definito in X tale che

- $F(x) = g(x)$ per $x \in G$;
- $F(x) \leq p(x)$ per $x \in X$.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\mathbf{P}$ costituito dalle funzioni lineari h definite in $D(h)$ un sottospazio vettoriale di X , con $G \subset D(h)$, h prolungamento di g e $h(x) \leq p(x)$.

Si vede che $\mathbf{P}$ è un insieme ordinato con la relazione d'ordine:

$h_1 \leq h_2$ quando h_2 è un prolungamento di h_1 e $D(h_1) \subset D(h_2)$.

Proviamo che $\mathbf{P}$ è un insieme ordinato induttivo e cioè che ogni suo sottoinsieme totalmente ordinato ammette maggiorante.

Sia $\mathbf{Q} \subset \mathbf{P}$ totalmente ordinato e indichiamo con $\mathbf{Q} = (h_i)_{i \in I}$.

Sia h la funzione definita nell'unione di $D(h_i)$ da

$$h(x) = h_i(x), \quad x \in D(h_i).$$

La funzione h è ben definita infatti se $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ con $i \neq j$, dal momento che $\mathbf{Q}$ è totalmente ordinato si ha che o h_i è un prolungamento di h_j oppure il viceversa, in entrambi i casi segue che $h(x) = h_i(x) = h_j(x)$. Inoltre h è un prolungamento di g .

Applicando il Lemma di Zorn¹ segue che esiste un elemento massimale $f \in \mathbf{P}$.

Il teorema è provato se vale che $D(f) = X$.

Supponiamo che $D(f) \neq X$ e sia $x_0 \in X - D(f)$. Definiamo la funzione lineare h nel sottospazio lineare definito in $D(h) = D(f) + \text{span}(x_0)$ da

$$h(y) = h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha, \quad y \in D(h)$$

dove la costante α sarà precisata più avanti.

È evidente che h è un'estensione di f .

Osserviamo dapprima che per ogni $x, y \in D(f)$ vale

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x).$$

Infatti dalla linearità di f e la sublinearità di p

¹ Ogni insieme ordinato induttivo e non vuoto ammette un elemento massimale

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(y - x_0) + p(x + x_0).$$

Scegliendo α

$$\sup_{y \in D(f)} (f(y) - p(y - x_0)) \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} (p(x + x_0) - f(x)),$$

si hanno che per ogni $x \in D(f)$ valgono le seguenti relazioni

$$f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) \quad f(x) - \alpha \leq p(x - x_0).$$

Proviamo che ogni $y \in D(h)$

$$h(y) \leq p(y),$$

e cioè che

$$h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0).$$

Dal fatto che $f(x) + \alpha \leq p(x + x_0)$ segue che per $t > 0$ $f(\frac{x}{t}) + \alpha \leq p(\frac{x}{t} + x_0) = \frac{1}{t}p(x + tx_0)$ e quindi $f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$. Sia $t < 0$, allora da $f(x) - \alpha \leq p(x - x_0)$, si ha $f(-\frac{x}{t}) - \alpha \leq p(-\frac{x}{t} - x_0) = -\frac{1}{t}p(x + tx_0)$ e quindi anche in questo caso $f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$.

Dal momento che $h \in \mathbf{P}$ è un prolungamento di f con $D(f) \subset D(h)$, vale $h \geq f$ nella relazione d'ordine definita in $\mathbf{P}$, contro il fatto che f è un elemento massimale.

OSSERVAZIONE 2.2. — *Nella seconda parte della dimostrazione abbiamo provato che se L è un sottospazio vettoriale di X , $x_0 \in X - L$ e g è una funzione lineare in L soddisfacente (2.2.2), allora la funzione lineare f definita in $L + \text{span}(x_0)$, da $f(y) = h(x + tx_0) = g(x) + \alpha$, per un opportuno α estende g su tutto X mantenendo la proprietà $f(x) \leq p(x)$ in X .*

Una importante conseguenza del Teorema di Hahn-Banach negli spazi normati è data da:

PROPOSIZIONE 2.2. — *Sia X uno spazio normato, e sia G un suo sottospazio. Ogni funzionale g lineare e continuo definito in G si prolunga in un funzionale lineare e continuo in X tale che*

$$\|F\|_{X^*} = \|g\|_{G^*}.$$

Dimostrazione. Dalle proprietà dei funzionali lineari e continui che abbiamo visto, si ha che

$$|g(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\|, \quad \forall x \in G$$

quindi considerando $p(x) = \|g\|_{G^*} \|x\|$, dal teorema di Hahn-Banach segue esiste un prolungamento F di g in X tale che

$$F(x) \leq \|g\|_{G^*} \|x\|, \quad \forall x \in X.$$

Da altra parte dal momento che $F(-x) = -F(x) \leq \|g\|_{G^*} \|x\|$ si ha

$$|F(x)| \leq \|g\|_{G^*} \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

e quindi $\|F\|_{X^*} \leq \|g\|_{G^*}$. Poiché l'altra disuguaglianza è banale, segue la tesi.

PROPOSIZIONE 2.3. – *Sia X uno spazio normato e sia $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. Esiste un funzionale lineare e continuo F_0 , tale che*

$$\|F_0\|_{X^*} = 1, \quad F_0(x_0) = \|x_0\|. \quad (2.2.3)$$

Dimostrazione. Sia $G = \text{span}x_0$ e definiamo $g(x) = g(tx_0) = t\|x_0\|$. Si vede che $|g(x_0)| = \|x_0\|$. Dal Teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale, che risulta lineare e continuo F_0 in X , che estende g e tale che $|F_0(x)| \leq \|x\|$ per ogni $x \in X$ e quindi $\|F_0\|_{X^*} \leq 1$. Tuttavia, poiché $F_0(x_0) = \|x_0\|$, necessariamente $\|F_0\|_{X^*} = 1$.

OSSERVAZIONE 2.3. – *Quest'ultima proposizione permette di stabilire una nuova espressione per la norma di $x \in X$ in termini dei funzionali lineari e continui:*

$$\|x\| = \text{Max}_{\|F\|_{X^*} \leq 1} |F(x)|. \quad (2.2.4)$$

Infatti, poiché $|F(x)| \leq \|F\|_{X^} \|x\|$ si che*

$$\|x\| \geq \sup_{F \in X^*} \frac{|F(x)|}{\|F\|_{X^*}},$$

e l'uguaglianza segue dalla Proposizione 3 dal momento che per ogni x esiste $F \in X^$ tale che $\|x\|_X = \|F\|_{X^*}$.*

Vale inoltre:

PROPOSIZIONE 2.4. – *Sia X uno spazio normato e $x_1 \in X$ tale che $F(x_1) = 0$ per ogni $F \in X^*$. Allora $x_1 = 0$.*

Dimostrazione. Se $x_1 \neq 0$, per la proposizione precedente dovrebbe esistere un funzionale F_1 lineare e continuo non identicamente nullo, con $\|F_1\|_{X^*} = 1$ e $F_1(x_1) = \|x_1\|$.

PROPOSIZIONE 2.5. – *Sia X uno spazio normato con almeno un elemento non nullo. Esiste un funzionale lineare e continuo non identicamente nullo.*

Dimostrazione. Sia x_0 un elemento non nullo di X e $G = \text{span}x_0$, definiamo $g(x) = g(tx_0) = t$. Dal Teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare e continuo F_0 in X , che estende g a X , non identicamente nullo, infatti $F_0(x_0) = 1$ ed inoltre $\|F_0\|_{X^*} = \|g\|_{G^*} = \frac{1}{\|x_0\|_X}$.

2.3 Spazi normati riflessivi

Sia X uno spazio normato e X^* il suo spazio duale. Consideriamo l'insieme dei funzionali lineari e continui su X^* , che indichiamo con X^{**} , l'insieme dei funzionali lineari e continui su X^* della forma: $\varphi : F \in X^* \rightarrow \varphi(F) \in \mathbb{R}$. X^{**} viene chiamato bidual di X .

Fissato $x \in X$ sia $\varphi_x \in X^{**}$ il funzionale definito da :

$$\varphi_x(F) = F(x).$$

Si vede che φ_x è un funzionale lineare e continuo su X^* . Infatti

$$|\varphi_x(F)| = |F(x)| \leq \|x\| \|F\|.$$

Resta quindi definita l'applicazione tra X e X^{**} :

$$J : x \in X \rightarrow \varphi_x \in X^{**}.$$

Dimostriamo che J è un'isometria tra X e X^{**} .

Da (2.2.4) segue che

$$\|x\|_X = \sup_{F \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|F\|_{X^*}} = \|\varphi_x\|_{X^{**}}.$$

In generale $J(X) \subset X^{**}$.

DEFINIZIONE 2.1. — *Uno spazio normato X è riflessivo quando $J(X) = X^{**}$.*

Si vede facilmente che:

- Ogni spazio riflessivo è completo in quanto isometrico allo spazio X^{**} , che è uno spazio completo.
- Ogni spazio a dimensione finita è uno spazio riflessivo.

Vale il seguente *teorema di Completamento*:

PROPOSIZIONE 2.6. — *Sia X uno spazio normato, esistono uno spazio di Banach B ed un sottospazio $Y \subset B$ tali che*

- Y è denso in B ;
- Y è isometrico a X .

Dimostrazione. Sia X^{**} il bidual di X , che è uno spazio completo per le proprietà dei duali e contiene il sottospazio $Y = (\varphi_x)$ isometrico a X .

Indichiamo con $B = \bar{Y}$, dove $\bar{Y}$ denota la chiusura di Y . B è un sottospazio chiuso di uno spazio completo e quindi è completo e Y è ovviamente denso nella sua chiusura.

2.4 Problema della minima norma e teoria della dualità

Sia X uno spazio normato, sia L un suo sottospazio e $x_0 \in X - L$, consideriamo i due seguenti problemi:

PROBLEMA 2.1. — **Determinare α tale che**

$$(P) \quad \alpha = \inf \{ \|x - x_0\|, \quad x \in L \}.$$

$\bar{x}$ è una soluzione di (P) se $\|\bar{x} - x_0\| = \alpha$.

PROBLEMA 2.2. — **Determinare β tale che**

$$(P^*) \quad \beta = \sup \{ F(x_0), \quad F \in L^\perp, \quad \|F\| \leq 1 \}.$$

dove $L^\perp$ è il sottospazio di X^* definito da

$$L^\perp = \{ F \in X^*, \quad F(x) = 0, \quad x \in L \},$$

$\bar{F}$ è una soluzione di (P^*) se $\bar{F}(x_0) = \beta$.

(P^*) è chiamato problema *duale* di (P) . Vale il seguente teorema:

TEOREMA 2.3. — **Assegnato L un sottospazio lineare dello spazio normato X e $x_0 \in X - L$. Si ha che:**

- $\alpha = \beta$
- il problema (P^*) ha sempre soluzione: esiste $\bar{F}$ tale che $\bar{F}(x_0) = \beta$.
- Se $\bar{F}$ è una soluzione di (P^*) , allora $\bar{x} \in L$ è una soluzione di (P) se e solo se

$$\bar{F}(x_0 - \bar{x}) = \|\bar{x} - x_0\|,$$

Per dimostrare il teorema di dualità abbiamo bisogno della seguente conseguenza del Teorema di Hahn-Banach:

PROPOSIZIONE 2.7. — *Sia L un sottospazio lineare di X e $x_0 \in X - L$, esiste un funzionale lineare e continuo F tale che $F(x) = 0$ per ogni $x \in L$ ed inoltre $\|F\| = 1$, $F(x_0) = \text{dist}(x_0, L) = \inf_{x \in L} \|x - x_0\|$.*

Dimostrazione. Sia $L_0 = L + \text{span } x_0$, per ogni $v \in L_0$ vale $v = \lambda x_0 + x$, con $x \in L$.

Definiamo in L_0 il funzionale lineare e continuo $g(v) = \lambda \text{dist}(x_0, L)$.

Si ha per $v \in L_0$:

$$|g(v)| = |\lambda| |\text{dist}(x_0, L)| \leq |\lambda| \|x_0 - (\frac{-x}{\lambda})\| \leq \|x + \lambda x_0\| = \|v\|.$$

che implica $\|g\|_{L^*} \leq 1$. Da altra parte per la definizione di estremo inferiore, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{x} \in L$ tale che

$$\|\bar{x} - x_0\| \leq \text{dist}(x_0, L) + \epsilon.$$

Segue, dal momento che $g(\bar{x} - x_0) = -\text{dist}(x_0, L)$

$$\|g\| \geq \frac{|g(\bar{x} - x_0)|}{\|\bar{x} - x_0\|} > \frac{\text{dist}(x_0, L)}{\text{dist}(x_0, L) + \epsilon},$$

e quindi $\|g\|_{L^*} = 1$. Dal Teorema di Hahn-Banach 2.2, g si estende in un funzionale lineare e continuo su X tale che $F(x) = g(x) = 0$ per ogni $x \in L$, $F(x_0) = \text{dist}(x_0, L)$ ed inoltre $\|g\|_{L^*} = \|F\|_{X^*} = 1$.

Passiamo alla dimostrazione del teorema 2.3:

Dimostrazione. Per $\epsilon > 0$ esiste $\tilde{x} \in L$ tale che $\|\tilde{x} - x_0\| \leq \alpha + \epsilon$. Sia $F \in L^\perp$ con $\|F\| \leq 1$, allora, poiché $F(x) = 0$ per ogni $x \in L$, si ha

$$F(x_0) = F(x_0 - \tilde{x}) \leq \|F\| \|\tilde{x} - x_0\| \leq \|\tilde{x} - x_0\|,$$

segue che $\beta \leq \alpha + \epsilon$ e dall'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, $\beta \leq \alpha$.

Sia $\alpha > 0$, dalla proposizione precedente esiste un funzionale $\bar{F} \in L^\perp$, dal momento che $\bar{F}(x) = 0$ per ogni $x \in L$ e $\|\bar{F}\| = 1$ ed inoltre

$$\bar{F}(x_0) = \text{dist}(x_0, L) = \alpha,$$

segue quindi che $\beta \geq \alpha$ e quindi $\beta = \alpha$. Inoltre è evidente che il funzionale $\bar{F}$ è la soluzione del problema duale (P*).

Se $\alpha = 0$ allora la relazione precedente vale per $F = 0$ e quindi anche $\beta = 0$.

Sia $\bar{F}$ la soluzione di (P*). Dal fatto che $\beta = \alpha$, si ha quindi che se $\bar{x} \in L$ è una soluzione di (P) dal momento che $F = 0$ in L , si ha:

$$\bar{F}(x_0) = \bar{F}(x_0 - \bar{x}) = \|\bar{x} - x_0\|.$$

Osserviamo inoltre che poiché $\alpha = \beta$, per ogni $G \in L^\perp$, con $\|G\| \leq 1$, si ha

$$G(x_0) \leq \beta = \alpha \leq \|x - x_0\|, \quad x \in L.$$

Vogliamo ora dare un risultato di dualità analogo al precedente nel caso più generale di sottoinsiemi convessi. Abbiamo bisogno quindi di alcune nozioni di analisi convessa ed in particolare del concetto di funzione coniugata di una funzione.

Consideriamo le funzioni convesse definite in uno spazio vettoriale X ed a valori in $] -\infty, +\infty]$, cioè le funzioni possono assumere il valore $+\infty$.

DEFINIZIONE 2.2. – *Un insieme C è detto convesso se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in C$ e t nell'intervallo $[0, 1]$ si ha $tx_1 + (1 - t)x_2 \in C$*

DEFINIZIONE 2.3. – *Una funzione φ definita in un insieme convesso C , si dice convessa se*

$$\varphi(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq t\varphi(x_1) + (1 - t)\varphi(x_2).$$

L'insieme $B(0, r) = \{x \in X : \|x\| < r\}$ è un insieme convesso e $g(x) = \|x\|$ è una funzione convessa in X .

DEFINIZIONE 2.4. – *Si dice epigrafo di una funzione reale $\varphi : X \rightarrow R$ l'insieme*

$$\text{epi } \varphi = \{(x, \lambda) \in X \times R, \varphi(x) \leq \lambda\}.$$

Diamo alcune proprietà elementari delle funzioni convesse.

- Se φ è una funzione convessa, allora $\text{epi } \varphi$ è un insieme convesso e viceversa.
- Se φ è una funzione convessa, allora per $\lambda \in R$, l'insieme $\{x \in C : \varphi(x) \leq \lambda\}$ è convesso, ma non vale il viceversa.
- Se φ_1 e φ_2 sono funzioni convesse, allora $\varphi_1 + \varphi_2$ è una funzione convessa.
- Se $(\varphi_i)_{i \in I}$ è una famiglia di funzioni convesse, allora l'involuppo superiore $\varphi(x) = \sup \varphi_i(x)$ è ancora una funzione convessa.

Diamo la definizione di *funzione coniugata* di una funzione definita in uno spazio normato.

DEFINIZIONE 2.5. — *Data una funzione $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, tale che $\varphi \neq +\infty$ si definisce la funzione $\varphi^* : X^* \rightarrow]-\infty, +\infty]$, detta coniugata di φ , mediante la relazione:*

$$\varphi^*(F) = \sup_{x \in X} (F(x) - \varphi(x)).$$

Si vede che la funzione φ^* è sempre una funzione convessa. Infatti poiché per ogni fissato x l'applicazione $F \rightarrow F(x) - \varphi(x)$ è convessa e continua si ha che l'involuppo superiore al variare di x rimane convessa.

Esempio 2.2 Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow]-\infty, +\infty]$, tale che $\varphi \neq +\infty$, è facile vedere che $\varphi^*(x)$ è definita in $\mathbb{R}^n$ ed è data da

$$\varphi^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (xy - \varphi(x)).$$

Consideriamo in uno spazio normato X la funzione norma $\varphi(x) = \|x\|$, si ha che

$$\varphi^*(F) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (F(x) - \|x\|),$$

dal momento che

$$F(x) - \|x\| \leq \|x\|(\|F\| - 1)$$

si vede che $\varphi^*(F) = 0$ se $\|F\| < 1$ e $\varphi^*(F) = +\infty$ quando $\|F\| \geq 1$.

DEFINIZIONE 2.6. — *Sia C un insieme convesso chiuso e non vuoto. Definiamo*

$$I_C(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ +\infty & x \notin C \end{cases}$$

La funzione convessa $I_C(x)$ è detta indicatrice di C , la sua funzione coniugata viene chiamata funzione d'appoggio di C .

Sia $x_0 \in X - C$, si ha che, nel caso di insiemi convessi, il legame tra il problema di minima distanza ed il suo problema duale, si ottiene considerando la coniugata della funzione norma e della funzione indicatrice.

Vale infatti

$$\text{dist}(x_0, C) = \inf_{x \in C} \|x - x_0\| = \max_{\|F\| \leq 1} (F(x_0) - I_C^*(F)). \quad (2.4.5)$$

Per dimostrare (2.4.5), osserviamo innanzitutto che

$$\inf_{x \in C} \|x - x_0\| = \inf_{x \in X} (\|x - x_0\| + I_C(x))$$

Vale inoltre il seguente teorema (per la dimostrazione rimandiamo a Brezis [1], [2])

TEOREMA 2.4. *—Siano φ_1, φ_2 due funzioni convesse e supponiamo che esista x_0 tale che $\varphi_1(x_0) < +\infty$ e $\varphi_2(x_0) < +\infty$ e φ_1 sia continua in x_0 . Allora*

$$\inf_{x \in X} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \max_{\|F\| \leq 1} (-\varphi_1^*(-F) - \varphi_2^*(F)).$$

Poniamo $\varphi_1(x) = \|x - x_0\|$ e $\varphi_2(x) = I_C(x)$ ed osserviamo che

$$\varphi_1^*(F) = \sup_{x \in X} (F(x) - \|x - x_0\|) = F(x_0),$$

infatti si ha

$$F(x) - \|x - x_0\| = F(x - x_0) + F(x_0) - \|x - x_0\| \leq$$

$$\|F\|_{X^*} \|x - x_0\| + F(x_0) - \|x - x_0\| \leq F(x_0)$$

ed in x_0 vale l'uguaglianza. Dal teorema precedente segue (2.4.5).

2.5 Forme geometriche del teor. di Hahn-Banach

Sia X uno spazio vettoriale normato.

DEFINIZIONE 2.7. *—Un iperpiano affine, di equazione $f = \alpha$, è un insieme della forma*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\},$$

con f lineare e non identicamente nulla.

PROPOSIZIONE 2.8. *—Si ha che H è un insieme chiuso se e solo se f è continua.*

Dimostrazione. Sia f continua è allora evidente che H è chiuso. Supponiamo che H chiuso quindi $X - H$ aperto e non vuoto dal momento che f non è identicamente nulla. Sia $x_0 \in X - H$ e sia per fissare le idee $f(x_0) < \alpha$. Proviamo che esiste un intorno convesso $B(x_0, r) \subset X - H$, tale $f(x) < \alpha$ in $B(x_0, r)$, da cui segue che f è limitata intorno a x_0 e quindi è continua.

Supponiamo che esista $x_1 \in B(x_0, r) \subset X - H$ con $f(x_1) > \alpha$. Il segmento $x(t) = (1-t)x_0 + tx_1$ è contenuto in $B(x_0, r)$ e in particolare per $\bar{t} = \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$ si ha $f(x(\bar{t})) = \alpha$ e quindi si arriva alla contraddizione $x(\bar{t}) \in H$.

Quando $X = R^2$, ogni iperpiano chiuso ha equazione:

$$H = \{(\chi, \eta) \in R^2 : a\chi + b\eta = \alpha\}.$$

con a, b reali fissati.

Diamo la definizione di insiemi convessi separati:

DEFINIZIONE 2.8. — *Siano $A, B \subset X$, diremo che l'iperpiano H di equazione $f(x) = \alpha$ separa A e B in senso largo se*

$$f(x) \leq \alpha \quad \text{per ogni } x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \text{per ogni } x \in B.$$

Diremo che l'iperpiano H di equazione $f(x) = \alpha$ separa A e B in senso stretto se esiste ϵ

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \text{per ogni } x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \text{per ogni } x \in B.$$

In altre parole, possiamo affermare che, definiti

$$H_{\leq} = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{e} \quad H_{\geq} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\},$$

l'iperpiano H separa in senso largo A e B se

$$A \subset H_{\leq} \quad B \subset H_{\geq}.$$

OSSERVAZIONE 2.4. — *Assegnato L un sottospazio lineare di X e $x_0 \in X - L$, dalla Proposizione 7 esiste un funzionale lineare e continuo F tale che*

$$F(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in L, \quad \|F\| = 1 \quad F(x_0) = \text{dist}(x_0, L),$$

segue che L è contenuto nell'iperpiano $H = \{x \in X : F(x) = 0\}$ che quindi separa L e $\{x_0\}$.

Vale il seguente teorema di separazione dei convessi, chiamato *Forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach*

TEOREMA 2.5. – *Siano $A, B \subset X$ insieme convessi, non vuoti e disgiunti con A aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso largo.*

La dimostrazione del teorema 2.5 si basa su due lemmi.

Il primo stabilisce alcune proprietà della funzione che si può associare ad un insieme convesso, detta funzione di *Jauge* dell'insieme o anche funzionale di Minkoski.

LEMMA 2.1. – *Sia C un insieme convesso aperto di uno spazio normato X , con $0 \in C$. Definiamo la funzione Jauge dell'insieme convesso C in X :*

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C \right\}.$$

Vale che:

- (i) *Per ogni $\lambda > 0$*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

- (ii) *Esiste $M > 0$ tale che per ogni $x \in X$*

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|.$$

- (iii) *Inoltre*

$$C = \{x \in X : p(x) < 1\}.$$

- (iv) *Per ogni $x, y \in X$*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Dimostrazione. La (i) segue dalle proprietà dell'estremo inferiore.

Proviamo (ii). Poiché C è un aperto esiste $B(0, r) \subset C$. Sia $x \in X$ allora $\frac{rx}{\|x\|} \in B(0, r)$, quindi $\frac{\|x\|}{r}$ appartiene all'insieme di cui $p(x)$ è l'estremo inferiore e quindi $p(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$.

Proviamo (iii). Sia $x \in C$, dal momento che C è aperto $(1 + \epsilon)x \in C$, per ϵ abbastanza piccolo, segue che $\frac{1}{1+\epsilon}$ appartiene all'insieme di cui $p(x)$ è l'estremo inferiore e quindi $p(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. Sia ora x tale che $p(x) < 1$, allora esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che $\frac{x}{\alpha} \in C$. Si conclude che $x = \alpha(\frac{x}{\alpha}) + (1 - \alpha)0$ appartiene a C .

Proviamo (iv). Siano $x, y \in X$ e $\epsilon > 0$. Poiché

$$p\left(\frac{x}{\epsilon + p(x)}\right) = \frac{p(x)}{\epsilon + p(x)} < 1,$$

e analogamente per y segue che $\frac{x}{\epsilon + p(x)}, \frac{y}{\epsilon + p(y)}$ appartengono a C . Dal momento che C è convesso, per $0 < t < 1$

$$t \frac{x}{\epsilon + p(x)} + (1 - t) \frac{y}{\epsilon + p(y)} \in C,$$

scegliendo opportunamente $t = \frac{p(x) + \epsilon}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} < 1$ si ha $\frac{x+y}{p(x) + p(y) + 2\epsilon} \in C$, che implica

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) + 2\epsilon,$$

che conclude la dimostrazione.

Dal lemma precedente segue anche che la funzione p è convessa in X .

OSSERVAZIONE 2.5. — *Si vede facilmente che se $C = B(0, r) \subset R^n$ allora $p(x) = \frac{\|x\|}{r}$ e se $C = X$ allora $p(x) = 0$.*

OSSERVAZIONE 2.6. — *Osserviamo inoltre che assegnato $p(x)$ un funzionale omogeneo, non negativo e convesso, nello spazio X , si verifica che il sottoinsieme di X definito da $\{x \in X : p(x) < 1\}$ è un convesso aperto.*

L'introduzione della funzione misura di *Jauge* permette di generalizzare l'osservazione 4 agli insiemi convessi.

LEMMA 2.2. — *Sia C un convesso aperto non vuoto contenuto in X e sia $x_0 \in X - C$.*

Esiste un funzionale lineare e continuo F in X tale che $F(x) < F(x_0)$ per ogni $x \in C$.

In particolare l'iperpiano

$$H = \{x \in X : F(x) = F(x_0)\},$$

separa $\{x_0\}$ e C in senso largo.

Dimostrazione. Operando una traslazione si può sempre supporre che $0 \in C$.

Sia $G = \text{span} x_0$ e definiamo $g(y) = g(tx_0) = t$. Si ha che $g(y) \leq p(y)$.

Infatti, sia $y = tx_0$ con $t > 0$, poiché $p(x_0) > 1$, dal momento che x_0 non appartiene a C , si ha:

$$g(y) = g(tx_0) = t < tp(x_0) = p(tx_0) = p(y).$$

Se $t < 0$ allora $g(y) = g(tx_0) = t < 0 < p(y)$.

Inoltre g è un funzionale continuo, infatti se $g(y) = t$ con $t > 0$ allora $g(y) < p(y) \leq M\|y\|$, se $t < 0$ si ha $|g(y)| = -g(tx_0) = -t < p(-tx_0) \leq \|tx_0\| = \|y\|$.

Dal Teorema di Hahn-Banach 2.2 esiste un prolungamento lineare e continuo F di g in X tale che $F(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$ e $F(x_0) = 1$.

Inoltre per $x \in C$ segue $F(x) \leq p(x) < 1 = F(x_0)$.

Quindi

$$C \subset \{x \in X : F(x) < 1\}, \quad \{x_0\} \subset \{x \in X : F(x) = F(x_0) = 1\},$$

che conclude la prova.

Dimostrazione del Teorema 2.5

Dimostrazione. Sia $C = A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$, si vede che C è un convesso, C è aperto, in quanto unione degli aperti disgiunti $C = \cup_{y \in B} (A - y)$ ed $0 \notin C$ dal momento che A e B sono disgiunti.

In base al lemma precedente, esiste F tale che, per ogni $z \in C$ sia $F(z) < F(0) = 0$ e di conseguenza per $x \in A$ e $y \in B$

$$F(x) < F(y) \quad \text{per ogni } x \in A, \quad y \in B.$$

Sia α tale che

$$\sup_{x \in A} F(x) \leq \alpha \leq \inf_{x \in B} F(x),$$

Considerato l'iperpiano $H = \{x \in X : F(x) = \alpha\}$, si vede facilmente che H separa A e B in senso largo.

Vale inoltre il seguente risultato di stretta separazione di convessi, per ladi-mostrazione rimandiamo a Brezis [1], [2].

TEOREMA 2.6. — *Siano A, B due insiemi convessi, non vuoti, disgiunti. Supponiamo che B sia chiuso e A sia compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso stretto.*

Dimostrazione. Denotiamo con $C = A - B$ che $\tilde{A}$ " un convesso aperto e $0 \notin C$. proviamo che C è un insieme chiuso. Sia $c_n = a_n - b_n$ che converge a c . Dal momento che A è un compatto da a_n si può estrarre una sottosuccessione, a_{n_k} , convergente a a allora $b_{n_k} = a_{n_k} - (a_{n_k} - b_{n_k})$ converge ad $a - c$ e dalfatto che B è chiuso segue che $c \in C$ e quindi anche C è chiuso.

Consideriamo l'aperto $X - C$ e sia $B(0, r)$ la palla di centro 0 e raggio r interamente contenuta in $X - C$. Dal teorema precedente esiste $F \in X^*$ che separa C e $B(0, r)$, con $F \neq 0$ ed in particolare esiste un α tale che:

$$F(\xi) < \alpha \leq F(a) - F(b) \Rightarrow F(0) = 0 < \alpha \leq F(a) - F(b)$$

prendendo $\xi = 0$. Si ottiene

$$\inf_{a \in A} F(a) - \sup_{b \in B} F(b) \geq \alpha > 0.$$

Quindi per $\alpha' < \alpha$

$$\inf_{a \in A} F(a) > \alpha' > \sup_{b \in B} F(b).$$

e l'iperpiano $F(x) = \alpha'$ separa A e B in senso stretto visto che esistono ϵ_1 e ϵ_2 tali che

$$\inf_{a \in A} F(a) = \alpha' + \epsilon_1 \Rightarrow F(a) \geq \alpha' + \epsilon_1, \quad a \in A$$

$$\sup_{b \in B} F(b) = \alpha' - \epsilon_2 \Rightarrow F(b) \leq \alpha' - \epsilon_2 \quad b \in B$$

Capitolo 3

Principi di Analisi Lineare

L'analisi funzionale lineare è basata oltre che sul teorema di Hahn-Banach anche sul principio di uniforme limitatezza o teorema di Banach-Steinhaus e dalle sue conseguenze teorema dell'applicazione aperta e del grafico chiuso. Tali teoremi hanno notevoli applicazioni e molti sono i risultati ad essi collegati. I tre teoremi hanno una radice comune richiedono la completezza degli spazi e sono una conseguenza del Lemma di Baire.

3.1 Operatori Lineari

In questa sezione diamo le definizioni e le proprietà principali degli operatori lineari.

DEFINIZIONE 3.1. *—Siano X e Y due spazi vettoriali. L'operatore $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ si dice lineare se $D(T)$ è un sottospazio vettoriale e per ogni $x, y \in D(T)$ e $\alpha, \beta \in R$*

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Le seguenti proprietà degli operatori lineari si provano facilmente.

- Il codominio di T , $R(T) = \{y \in Y : y = Tx, x \in X\}$ è un sottospazio lineare di Y .
- Il nucleo di T , definito da $N(T) = \{x \in D(T) : T(x) = 0\}$ è un sottospazio lineare di X .

- Se la dimensione di $D(T)$ è uguale a n allora la dimensione di $R(T)$ è minore o uguale a n .
- Un operatore lineare è iniettivo se e solo se $N(T) = \{0\}$.
- L'operatore inverso di T , $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$, esiste se e solo se

$$T(x) = 0 \implies x = 0,$$

ed è un operatore lineare.

- Se $T : X \rightarrow Y$ e $S : Y \rightarrow X$ sono due operatori lineari tali che $TS = I$ e $ST = I$ dove I è l'operatore identico si ha che T è biiettivo e $S = T^{-1}$.

Siano X e Y due spazi normati, con procedimenti analoghi a quelli utilizzati per i funzionali si prova che:

- Un operatore lineare T continuo in $0 \in X$ è continuo in ogni punto. Inoltre T è continuo se e solo se è limitato intorno allo 0 e cioè esiste $c > 0$ tale che

$$\|Tx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X$$

- Sia T un operatore lineare e continuo allora se $(x_k) \subset D(T)$ e x_k converge a x si ha $T(x_k)$ converge a $T(x)$. Segue che il nucleo $N(T)$ è chiuso.

Lo spazio vettoriale dei funzionali lineari e continui da X a Y si denota con $\mathcal{L}(X, Y)$. Si dimostra facilmente che $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio normato munito della norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|T(x)\|. \quad (3.1.1)$$

La norma (3.1.1) è equivalente alla seguente:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}. \quad (3.1.2)$$

Nel seguito indicheremo con $\|\cdot\|$ sia la norma nello spazio X che quella nello spazio Y .

Procedendo come nel teorema 2.1, si ha

TEOREMA 3.1. — *Se Y è uno spazio di Banach allora lo spazio $\mathcal{L}(X, Y)$, dotato della norma (3.1.1) è uno spazio di Banach.*

OSSERVAZIONE 3.1. — *Come nel caso di funzionali la proprietà di limitatezza degli operatori è diversa da quella usuale: un' applicazione*

si dice limitata se il suo codominio è limitato, nel caso dei funzionali e degli operatori lineari significa che trasforma insiemi limitati di X in insiemi limitati di Y .

Ad ogni operatore lineare e limitato da X a Y si associa un operatore chiamato **operatore aggiunto** definito nel duale Y^* di Y ed a valori il duale X^* di X .

Sia $T : X \rightarrow Y$ e consideriamo un funzionale lineare e continuo su Y , $G \in Y^*$ allora per $y = T(x)$ definiamo il funzionale su X definito da

$$F(x) = G(T(x))$$

Il funzionale F è lineare e continuo, infatti

$$|F(x)| = |G(T(x))| \leq \|G\| \|T(x)\| \leq \|G\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \quad (3.1.3)$$

Quindi a partire dall'operatore T si costruisce un operatore

$$Y^* \rightarrow X^*$$

definito da

$$G \in Y^* \rightarrow F \in X^*, \quad F(x) = G(T(x)), \quad x \in X$$

PROPOSIZIONE 3.1. *—L'operatore aggiunto di T è lineare e limitato ed*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)}.$$

Dimostrazione. T^* è ovviamente lineare ed è limitato da (3.1.3) ed inoltre

$$\|T^*(G)\|_{X^*} = \sup_{x \neq 0} \frac{|G(T(x))|}{\|x\|} \leq \|G\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)},$$

Dal momento che:

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} = \sup \frac{\|T^*(G)\|_{X^*}}{\|G\|_{Y^*}}$$

si ha

$$\frac{\|T^*(G)\|_{X^*}}{\|G\|_{Y^*}} = \frac{1}{\|G\|_{Y^*}} \sup \frac{|G(T(x))|}{\|x\|_X} \leq \frac{1}{\|G\|_{Y^*}} \frac{1}{\|x\|_X} \|G\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X,$$

che implica

$$\|T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*,X^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Dal Teorema di Hahn-Banach, sia $x_0 \in X$ e $T(x_0) \in Y$, esiste un funzionale lineare e continuo in Y tale che $\|G_0\| = 1$ e $G_0(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$. dalla definizione di operatore aggiunto

$$G_0(T(x_0)) = T^*(G_0)(x_0),$$

quindi

$$\|T(x_0)\| = G_0(T(x_0)) \leq \|T^*(G_0)\| \|x_0\| \leq \|T^*\| \|G_0\| \|x_0\| \leq \|T^*\| \|x_0\|,$$

da cui segue l'uguaglianza delle norme.

OSSERVAZIONE 3.2. — *Diamo alcuni esempi di operatori lineari e limitati.*

1. *L'operatore identità $T : x \in X \rightarrow x$ da uno spazio normato in se stesso è un operatore limitato con $\|T\| = 1$.*
2. *Sia X lo spazio dei polinomi su $I = [0, 1]$ con la norma del massimo e consideriamo $T(x) = x'$, ad ogni polinomio associa la sua derivata. L'operatore T è lineare ma non limitato, infatti quando consideriamo $x_n(t) = t^n$ sia ha che $\|x_n\| = 1$ ma $T(x) = nt^{n-1}$ e quindi $\|T(x_n)\| = n$, quindi non esiste c tale che $\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq c$, per ogni n .*
3. *Sia $X = C^0([a, b])$ con la norma del massimo, assegnata $K(x, y)$ una funzione continua definita in $[a, b] \times [a, b]$ definiamo l'operatore:*

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy \in C^0([a, b]).$$

T è un operatore lineare e continuo infatti, per ogni $u \in X$, vale

$$|\int_a^b K(x, y)u(y)dy| \leq \text{Max}_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)| \int_a^b |u(y)|dy,$$

da cui segue che

$$\|Tu\| \leq \text{Max}_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|(b-a)\|u\|_{C^0}.$$

4. *Siano X e Y due spazi a dimensione finita e con $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, \dots, f_r\}$ le rispettive basi e $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Dal momento che ogni $u \in X$ ha un'unica rappresentazione della forma $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$, si ha:*

$$v = T(u) = \sum_{n=1}^n u_i T(e_i) = \sum_{n=1}^n u_i \sum_{j=1}^r a_{ji} f_j$$

quindi l'operatore T è univocamente determinato se le immagini $T(e_i)$ della base di X sono assegnate.

Una matrice a_{ji} reale, con r righe e n colonne definisce un operatore lineare tra R^n e R^r , con l'usuale prodotto di una matrice per un vettore.

Ogni operatore lineare definito in uno spazio a dimensione finita è limitato.

3.2 Lemma di Baire

Il lemma di Baire anche detto delle categorie ha varie applicazioni in analisi funzionale.

DEFINIZIONE 3.2. *—Sia X uno spazio metrico. Un sottoinsieme M si dice denso in X se la sua chiusura coincide con X , $\overline{M} = X$. Di conseguenza M è denso se e solo se ogni intorno circolare contenuto in X ha intersezione non vuota con M .*

Osserviamo che se

$$\overline{M} = X \Leftrightarrow \text{Int}(-M) = \emptyset.$$

Infatti dal momento che fissato $x \in X$ si ha che ogni intorno di x ha intersezione non vuota con M , non esiste un intorno di x interamente contenuto in $(-M)$. Viceversa se l'interno del complementare di M è vuoto vuol dire che ogni intorno di ogni elemento di X ha intersezione non vuota con M e quindi M è denso.

DEFINIZIONE 3.3. *—Dato X uno spazio metrico ed un suo sottoinsieme M si dice che*

- *M è raro se la sua chiusura $\overline{M}$ in X , non ha punti interni, $\text{Int}(\overline{M}) = \emptyset$.*
- *M è di prima categoria se è l'unione di una successione numerabile M_n di insiemi rari in X :*

$$M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n, \quad \text{Int}(\overline{M_n}) = \emptyset.$$

- M è di seconda categoria quando non è di prima categoria.

Si vede facilmente:

- Ogni insieme finito di R è raro.
- L'insieme dei numeri razionali è di prima categoria in R .
- Ogni insieme non vuoto aperto di R è di seconda categoria in R .

Vale il seguente teorema detto **delle categorie di Baire**.

TEOREMA 3.2. — *Sia X uno spazio metrico completo e sia (C_n) una successione di chiusi. Supponiamo che $\text{Int } C_n = \emptyset$, per ogni $n \geq 1$. Allora*

$$\text{Int}(\cup_{n=1}^{+\infty} C_n) = \emptyset. \quad (3.2.4)$$

OSSERVAZIONE 3.3. — *Il teorema di Baire afferma che ogni spazio metrico completo è di seconda categoria.*

Supponiamo che X è di prima categoria, dovrebbero esistere M_n con $\text{Int}(\bar{M}_n) = \emptyset$ tali che $X = \cup_{n=1}^{+\infty} M_n$, e quindi dal Teorema di Baire si avrebbe

$$\text{Int}(\cup_{n=1}^{+\infty} \bar{M}_n) = \text{Int}(X) = \emptyset.$$

Il teorema di Baire è utilizzato nelle seguenti forme:

1. *Sia X uno spazio metrico completo e sia (C_n) una successione di chiusi tale che*

$$\cup_{n=1}^{+\infty} C_n = X,$$

allora esiste n_0 tale che $\text{Int } C_{n_0} \neq \emptyset$.

2. *Sia X uno spazio metrico completo allora l'intersezione di ogni famiglia numerabile di sottoinsiemi aperti densi di X è densa in X .*

Infatti se $\bar{A}_n = X$ per ogni n allora $\text{Int}(-A_n) = \emptyset$, quindi $\text{Int}(-\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \emptyset \implies \cap_{n=1}^{+\infty} \bar{A}_n = X$.

Dimostrazione. Sia $A_n = (-C_n)$ l'insieme aperto complementare di C_n che è denso in X , cioè $\bar{A}_n = X$, dal momento che C_n ha interno vuoto, quindi

(3.2.4) è equivalente a provare che $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, è ancora denso in X e quindi per ogni ω un aperto non vuoto contenuto in X si deve avere $\omega \cap A \neq \emptyset$.

Sia $x_0 \in \omega$ e $B(x_0, r_0)$ una palla di centro x_0 tale che $\bar{B}(x_0, r_0) \subset \omega$, proviamo che

$$B(x_0, r_0) \cap A \neq \emptyset.$$

Da momento che A_1 è denso in X si ha che $A_1 \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$. Sia $x_1 \in A_1 \cap B(x_0, r_0)$ e $r_1 > 0$ tali che

$$\bar{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap A_1, \quad 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}.$$

Da altra parte A_2 è denso in X e quindi $B(x_1, r_1) \cap A_2 \neq \emptyset$. Sia $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap A_2$ e $r_2 > 0$ tali che

$$\bar{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap A_2, \quad 0 < r_2 < \frac{r_1}{2}.$$

Per ricorrenza si costruisce una successione x_n di punti di X e di numeri reali positivi r_n tali che per ogni $n \geq 0$

$$\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap A_{n+1} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}.$$

Si ha che $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{r_n}{2^n}$.

La successione (x_n) è di Cauchy, infatti

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots$$

$$\dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq r_0 \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^i}.$$

Dal momento che X è completo, segue che x_n converge in X a $\bar{x}$.

Proviamo che $\bar{x} \in A \cap B(x_n, r_n)$. Infatti

$$d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, \bar{x}) \leq r_n + d(x_{n+p}, \bar{x}),$$

e facendo tendere $p \rightarrow +\infty$ si ha

$$d(x_n, \bar{x}) \leq r_n,$$

segue che $\bar{x} \in \bar{B}(x_n, r_n)$. Ma dal momento che per costruzione $\bar{B}(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap A_n$, per ogni $n \geq 0$ segue che $\bar{x} \in A_n \cap B(x_0, r_0)$, per ogni $n \geq 0$ e quindi $\bar{x} \in A_n \cap B(x_0, r_0)$.

L'inverso del Teorema di Baire non è in generale vero, infatti vi è un esempio dovuto a Bourbaki (1955) di uno spazio normato non completo di seconda categoria.

3.3 Teorema di Banach-Steinhaus

Il teorema di Banach-Steinhaus afferma che per una famiglia di operatori lineari definiti in uno spazio di Banach X la limitatezza puntuale implica quella uniforme. Quindi se consideriamo una successione di operatori lineari $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, definiti in X limitata in ogni punto $x \in X$, la successione è limitata nella norma dello spazio $\mathcal{L}(X, Y)$ e quindi uniformemente limitata in X .

TEOREMA 3.3. — *Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio di normato e $(T_{i \in \mathcal{J}})$, una famiglia, non necessariamente numerabile, di operatori lineari e continui di X in Y . Supponiamo che*

$$\sup_{i \in \mathcal{J}} \|T_i(x)\| < +\infty, \quad \text{per ogni } x \in X, \quad (3.3.5)$$

allora

$$\sup_{i \in \mathcal{J}} \|T_i\| < +\infty. \quad (3.3.6)$$

Esiste quindi una costante $c > 0$ tale che

$$\|T_i(x)\| \leq c\|x\|, \quad \text{per ogni } x \in X \quad \text{e} \quad i \in \mathcal{J}.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$, poniamo

$$X_n = \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n, \quad \text{per ogni } i \in \mathcal{J}\}.$$

L'insieme X_n è chiuso, infatti sia $x \in \overline{X_n}$ e $(x_k) \subset X_n$ che converge a x . Questo significa che per ogni i si ha $\|T_i(x_k)\| \leq n$, per ogni $k \in N$ e dal momento che T_i è continuo si ha che $\|T_i(x)\| \leq n$, quindi $x \in X_n$.

Proviamo che

$$\cup_{n \in N} X_n = X.$$

Infatti da (3.3.5) si ha che ogni $x \in X$ esiste M_x tale che $\|T_i(x)\| \leq M_x$ per ogni $i \in \mathcal{J}$ e quindi esiste n tale che $x \in X_n$.

Dal lemma di Baire esiste n_0 tale che $\text{Int } X_{n_0} \neq \emptyset$. Siano $x_0 \in X$ e $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$.

Fissato $x \in X$ diverso dall'elemento nullo, poniamo $z = x_0 + \gamma x$ con $\gamma = \frac{r}{2\|x\|}$. Allora $\|z - x_0\| < r$ e quindi $z \in B(x_0, r)$ e di conseguenza $\|T_i(z)\| \leq n_0$, per ogni $i \in \mathcal{J}$. Inoltre poiché $x = \frac{1}{\gamma}(z - x_0)$, si ottiene

$$\|T_i(x)\| = \frac{1}{\gamma}\|T_i(z - x_0)\| \leq \frac{1}{\gamma}(\|T_i(z)\| + \|T_i(x_0)\|) \leq \frac{4}{r}n_0\|x\|.$$

Quindi $\|T_i(x)\| \leq \frac{4}{r}n_0\|x\|$ per ogni $i \in \mathcal{J}$. Si conclude che

$$\|T_i\| = \sup \frac{\|T_i(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{r}n_0 \quad \text{per ogni } i \in \mathcal{J}.$$

OSSERVAZIONE 3.4. — *Il Teorema 3.3 viene spesso usato per dimostrare la non completezza di spazi normati.*

- *Proviamo che lo spazio normato dei polinomi sull'intervallo $[0, 1]$ con la norma definita da*

$$\|p\| = \text{Max}_j |a_j|,$$

dove a_j sono i coefficienti del polinomio, non è uno spazio completo.

Si riesce infatti a costruire una successione di operatori lineari e continui che soddisfano (3.3.5) ma non (3.3.6).

Osserviamo che il polinomio p può essere scritto nella forma

$$p(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j,$$

dove $a_j = 0$ per $j > N_p$ e N_p è il grado del polinomio p .

Definiamo la successione di funzionali

$$T_n(0) = 0 \quad \text{e} \quad T_n(p) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$$

che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sono funzionali lineari e limitati dal momento che $|a_j| \leq \|p\|$ e quindi $|T_n(p)| \leq n\|p\|$.

Dal momento che un polinomio di grado N_p ha $N_p + 1$ coefficienti non nulli, segue che

$$|T_n(p)| \leq (N_p + 1) \text{Max}_j |a_j| = C_p \|p\|$$

la successione $T_n(p)$ soddisfa (3.3.5) per ogni $p \in X$.

Se si potesse applicare il Teorema di Banach-Steinhaus si dovrebbe avere

$$\|T_n\| \leq c\|p\| \quad \forall p.$$

Ma se scegliamo $\bar{p}(t) = 1 + t + \dots + t^n$ si ha $\|\bar{p}\| = 1$, e $T_n(\bar{p}) = n = n\|\bar{p}\|$, quindi passando all'estremo superiore:

$$\|T_n\| \geq \frac{T_n(\bar{p})}{\|\bar{p}\|} = n,$$

e quindi la successione T_n non è equilimitata in norma.

- **Usando il teorema di Banach-Steinhaus si prova anche lo spazio X delle funzioni continue che sono non nulle in un sottointervallo strettamente contenuti in $[0, 1]$, con la norma del massimo non è completo.**

A questo scopo, definiamo la successione di funzionali

$$T_n(f) = nf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Proviamo che $\sup_n |T_n(f)| < +\infty$ per ogni f ed invece $\sup_n \|T_n\| = +\infty$.

Sia $f \in X$, osserviamo che esiste n_f tale che

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad n > n_f \implies T_n(f) = 0, \quad n > n_f.$$

Quindi per ogni $n > n_f$:

$$\sup_n |T_n(f)| = \max_{1 \leq i \leq n_f} |T_i(f)| = \max_{1 \leq i \leq n_f} \left| if\left(\frac{1}{i}\right) \right| \leq n_f \|f\|_{C^0},$$

allora $\|T_n(f)\|$ è limitato per ogni f :

$$\|T_n\| = \sup \frac{|T_n(f)|}{\|f\|} \leq n.$$

Tuttavia, scegliendo $\tilde{f} \in X$ con $\sup |\tilde{f}| = |\tilde{f}(\frac{1}{n})|$, segue

$$\|T_n\| \geq \frac{|T_n(\tilde{f})|}{\|\tilde{f}\|} = n.$$

Diamo alcune interessanti conseguenze del teorema 3.3.

COROLLARIO 3.1. – *Siano X e Y due spazi di Banach e (T_n) una successione di operatori lineari e continui di X in Y . Supponiamo che la successione di elementi di Y , $(T_n(x))$ per ogni $x \in X$ converge verso un limite $T(x)$. Allora si ha*

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty, \quad (3.3.7)$$

$$T \in \mathcal{L}(X, Y), \quad (3.3.8)$$

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\|. \quad (3.3.9)$$

Dimostrazione. (3.3.7) segue direttamente dal teorema 3.3.

Inoltre si ha che esiste c tale che per ogni n e $x \in X$ vale

$$\|T_n(x)\| \leq c\|x\| \quad \text{per ogni } n, x \in X$$

e quindi passando al limite si ottiene $\|T(x)\| \leq c\|x\|$.

L'operatore T è ovviamente lineare e infine passando al limite su n nella relazione $\frac{\|T_n(x)\|}{\|x\|} \leq \|T_n\|$ segue (3.3.9).

COROLLARIO 3.2. – *Siano G uno spazio di Banach e B un sottoinsieme di G . Supponiamo che per ogni $F \in G^*$ si abbia che*

$$F(B) = \cup_{x \in B} F(x), \quad (3.3.10)$$

è un sottoinsieme limitato di R allora B è un insieme limitato nella norma di G .

Dimostrazione. Introduciamo la famiglia di operatori

$$T_b : F \in G^* \rightarrow R,$$

definiti da

$$T_b(F) = F(b).$$

Dalla limitatezza del sottoinsieme $F(B)$ in R segue che per ogni $F \in G^*$ esiste una costante c_F tale che:

$$|T_b(F)| = |F(b)| \leq c_F, \quad \text{per ogni } b \in B.$$

Dal teorema 3.3 ($X = G^*$, $Y = R$ e $I = B$) segue

$$\sup_{b \in B} \frac{|T_b(F)|}{\|F\|_{G^*}} < +\infty,$$

e quindi esiste una costante $c > 0$ tale che

$$|F(b)| \leq c\|F\|, \quad \text{per ogni } F \in G^*, \quad \text{per ogni } b \in B.$$

Poiché dalla espressione duale della norma in G (2.2.4) si ha:

$$\|b\|_G = \text{Max}_{F \neq 0} \frac{|F(b)|}{\|F\|_{G^*}},$$

si conclude che $\|b\| \leq c$ per ogni $b \in B$.

OSSERVAZIONE 3.5. — *L'inverso del corollario precedente è sempre vero. Infatti se B è limitato nella norma di X si ha $|F(x)| \leq \|F\|\|x\| \leq M\|F\|$.*

OSSERVAZIONE 3.6. — *Il risultato precedente dice che per verificare se un sottoinsieme di uno spazio di Banach è limitato basta stabilire la limitatezza per ogni funzionale lineare e continuo. Il procedimento è analogo a quello in dimensione finita, quando si considerano le componenti rispetto ad una base.*

Infine vale il seguente risultato negli spazi duali:

COROLLARIO 3.3. — *Sia G uno spazio di Banach e sia B^* un sottoinsieme di G^* . Supponiamo che per ogni $x \in G$ si abbia che*

$$\cup_{F \in B^*} F(x), \quad (3.3.11)$$

è un sottoinsieme limitato di R cioè per ogni $x \in G$ esiste c_x tale che

$$|F(x)| \leq c_x, \quad \text{per ogni } F \in B^*$$

allora B^ è un insieme limitato nella norma di G^* .*

Dimostrazione. Appliciamo il teorema 3.3 con $X = G$, $Y = R$ e $\mathcal{J} = B^*$ e consideriamo la famiglia di operatori

$$T_F : G \rightarrow R$$

definiti da

$$T_F(x) = F(x) \quad \text{per ogni } F \in B^*, \quad \text{per ogni } x \in G,$$

La famiglia degli operatori T_F è puntualmente limitata e per il teorema 3.3 anche uniformemente limitata: segue che

$$\text{Sup}_{x \in G} \frac{|T_F(x)|}{\|x\|_G} < +\infty.$$

Quindi esiste una costante c tale che $|F(x)| \leq C\|x\|$ per ogni $F \in B^*$ e $x \in G$ e quindi $\|F\|_{X^*} \leq C$ per ogni $F \in B^*$.

3.4 Teorema dell'applicazione aperta

Questa sezione è dedicata al teorema dell'applicazione aperta, che stabilisce le condizioni sotto le quali un operatore lineare e continuo è anche aperto, cioè l'immagine di ogni insieme aperto è aperto. Questo risultato permette di determinare le condizioni affinché l'operatore inverso di un operatore lineare e limitato sia limitato e quindi continuo.

DEFINIZIONE 3.4. – *Siano X e Y due spazi metrici e $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$, diremo che T è un'applicazione aperta se l'immagine di ogni aperto in $D(T)$ è un aperto di Y .*

Notiamo che se l'applicazione non è surriettiva bisogna precisare se è aperta dal suo dominio $D(T)$ in Y oppure da $D(T)$ nel suo codominio $R(T)$ e si vede facilmente che la seconda condizione è più debole della prima.

Per evitare confusioni ricordiamo che un'applicazione continua $T : X \rightarrow Y$ ha la proprietà che ogni insieme aperto di Y ha l'immagine inversa che è un aperto di X .

Questa condizione *non* implica che T manda aperti in aperti: ad esempio $t \in \mathbb{R} \rightarrow \sin t$ è continua ma l'immagine di $(0, 2\pi)$ è $[-1, 1]$.

TEOREMA 3.4. – *Un operatore lineare, limitato e surriettivo $T : X \rightarrow Y$, con X e Y due spazi di Banach è un operatore aperto.*

Inoltre se T è biiettivo, T^{-1} è continuo e limitato.

La dimostrazione del teorema segue dal seguente lemma:

LEMMA 3.1. – *Un operatore limitato e lineare $T : X \rightarrow Y$, con X e Y due spazi di Banach ha la seguente proprietà :*

- *Denotato con $B_0 = B(0, 1)$, l'intorno di centro 0 e raggio 1 in X , si ha che l'immagine $T(B_0)$ è un'intorno circolare di Y che contiene 0. Più precisamente si ha che esiste una costante $r > 0$ tale che*

$$B_Y(0, r) \subset T(B_0(0, 1)). \quad (3.4.12)$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue in vari passi.

- **(a)** La chiusura dell'immagine dell'intorno aperto $B_1 = B(0, \frac{1}{2})$ contiene un insieme aperto B^*

- **(b)** Sia $B_n = B(0, \frac{1}{2^n})$ si ha che la chiusura della sua immagine $\overline{T(B_n)}$ contiene un intorno aperto di $0, V_n$, in Y .
- **(c)** $T(B_0)$ contiene un intorno dello $0 \in Y$.

Proviamo **(a)**. Denotiamo con $B_1 = B(0, \frac{1}{2}) \subset X$.

Per ogni fissato $x \in X$ esiste k sufficientemente grande $k > 2\|x\|$, tale che $x \in kB_1$. Quindi

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} kB_1.$$

Poiché T è lineare e surriettivo

$$Y = T(X) = T(\cup_{k=1}^{\infty} kB_1) = \cup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \cup_{k=1}^{\infty} k\overline{T(B_1)}.$$

Poiché Y è completo, dal lemma di Baire, segue che esiste k tale che l'interno di $k\overline{T(B_1)}$ è non vuoto e quindi contiene un aperto non vuoto. Di conseguenza, anche $\overline{T(B_1)}$ contiene un intorno aperto

$$B^* = B(y_0, r) \subset \overline{T(B_1)}.$$

(b) Osserviamo che $B^* - y_0 = B_Y(0, r)$ e quindi:

$$B^* - y_0 = B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_1)} - y_0. \quad (3.4.13)$$

Proviamo dapprima che $B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_0)}$.

Dalla (3.4.13) basta provare che:

$$\overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_0)}. \quad (3.4.14)$$

Sia $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$. Allora $y + y_0 \in \overline{T(B_1)}$ e segue che esistono due successioni $u_n = T(w_n)$ e $v_n = T(z_n)$ di elementi di $T(B_1)$ che convergono rispettivamente agli elementi $y + y_0$ e y_0 di $\overline{T(B_1)}$.

Poiché $w_n, z_n \in B_1$ si ha

$$\|w_n - z_n\| \leq \|w_n\| + \|z_n\| \leq 1,$$

quindi $w_n - z_n \in B_0$. Dal fatto che

$$T(w_n - z_n) = T(w_n) - T(z_n) = u_n - v_n \rightarrow y,$$

segue che $y \in \overline{T(B_0)}$: Poiché $y \in \overline{T(B_1)} - y_0$ era arbitrario, si ha (3.4.14).

Da (3.4.13) si ha dunque

$$B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_0)}.$$

Sia $B_n = B(0, 2^{-n}) \subset X$. Poiché T è lineare $\overline{T(B_n)} = 2^{-n}\overline{T(B_0)}$ e quindi si ottiene

$$V_n = B_Y(0, \frac{r}{2^n}) \subset \overline{T(B_n)}.$$

(c) Infine proviamo che

$$V_1 = B_Y(0, \frac{r}{2}) \subset T(B_0).$$

Sia $y \in V_1$ da (b) segue che $y \in \overline{T(B_1)}$.

Esiste quindi un elemento $v \in T(B_1)$ tale che $\|y - v\| < \frac{r}{4}$ e poiché $v = T(x_1)$ con $x_1 \in B_1$ si ha anche

$$\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}.$$

Allora $(y - T(x_1)) \in V_2$ e dal momento che $V_2 \subset \overline{T(B_2)}$, esiste $x_2 \in B_2$ tale che

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{r}{8} \Rightarrow y - T(x_1) - T(x_2) \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$$

Segue che in n passi possiamo costruire una successione $x_n \in B_n$ tale che

$$\|y - \sum_{k=1}^n T(x_k)\| < \frac{r}{2^{n+1}}.$$

Sia $z_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, poiché $x_k \in B_k$ e $\|x_k\| < \frac{1}{2^k}$, per $n > m$ si ha

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k}$$

quindi z_n è di Cauchy e dal momento che X è uno spazio completo, converge ad un elemento x .

Proviamo che $x \in B_0$, infatti

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{r}{2^k} < 1.$$

Dalla continuità di T , $T(z_n) \rightarrow T(x)$ e quindi $y = T(x)$ e $y \in T(B_0)$.

Dimostrazione del Teorema 3.4:

È facile provare che T è aperto e cioè per ogni insieme aperto A di X , $T(A)$ è un aperto di Y . In particolare vale che per ogni $y = T(x) \in T(A)$ esiste un intorno di y contenuto in $T(A)$.

Sia $y = T(x) \in T(A)$ siccome A è aperto, A contiene un'intorno circolare aperto di centro x e quindi $A - x$ è un aperto che contiene un intorno $B(0, r)$ di centro 0 da cui segue che $\frac{1}{r}(A - x)$ contiene $B_0 = B(0, 1)$.

Per il lemma precedente segue che $T(\frac{1}{r}(A - x)) = \frac{1}{r}(T(A) - T(x))$ contiene un intorno di 0 che è contenuto anche in $T(A) - T(x)$, quindi $T(A)$ contiene un intorno aperto di $y = T(x)$.

Infine quando $T^{-1} : Y \rightarrow X$ esiste, essendo l'inverso di un operatore aperto è continuo.

OSSERVAZIONE 3.7. — *Diamo un'applicazione del Teorema 3.4.*

Consideriamo il seguente problema di Cauchy per un'equazione ordinaria lineare della forma:

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.4.15)$$

con α e f funzioni continue e proviamo che la soluzione, che esiste per il teorema di Cauchy, dipende con continuità dai dati f e u_0 .

Definiamo l'operatore:

$$T : u \in C^1([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \times \mathbb{R},$$

tale che

$$u \rightarrow (u'(t) + \alpha(t)u(t), u(0)).$$

L'operatore T è lineare e limitato, infatti

$$\|T(u)\| = \|u' + \alpha u\|_\infty + |u(0)| \leq \|u'\|_\infty + \|u\|_\infty \|\alpha\|_\infty + |u(0)| \leq C\|u\|_{C^1}.$$

Inoltre, per il teorema di esistenza e unicità di Cauchy, T è anche suriettivo, quindi per il teorema dell'applicazione aperta, T è un operatore aperto ed il suo operatore inverso

$$T^{-1} : C^0([0, 1]) \times \mathbb{R} \rightarrow C^1([0, 1]),$$

che ad ogni coppia di elementi (f, u_0) associa la soluzione del problema (3.4.15) è continuo.

Ne segue che assegnata una successione di funzioni continue e numeri reali $(f_n, u_{0,n})$ che converge (f, u_0) in $C^0([0, 1]) \times \mathbb{R}$, la successione delle soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha(t)u(t) = f_n(t), & t \in [0, 1] \\ u(0) = u_{0,n} \end{cases}$$

converge in $C^1([0, 1])$ alla soluzione del problema (3.4.15).

OSSERVAZIONE 3.8. – *Sia X uno spazio normato di Banach rispetto a due norme distinte e esiste C tale che:*

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1,$$

allora le due norme sono equivalenti. La proprietà segue dal teorema precedente considerando $X = (X, \|x\|_1)$, $Y = (X, \|x\|_2)$ e T è l'operatore identità di X . L'operatore T è lineare, continuo e surriettivo, quindi per il Teorema dell'Applicazione Aperta l'operatore inverso T^{-1} è continuo e limitato e quindi vale

$$\|T^{-1}(x)\| = \|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2.$$

3.5 Teorema del grafico chiuso

Alcuni operatori lineari importanti per le applicazioni non sono limitati, tuttavia in alcuni casi sono operatori chiusi. In questa sezione studiamo le proprietà degli operatori lineari chiusi.

Osserviamo dapprima che assegnati due spazi normati X, Y , lo spazio $X \times Y$ è uno spazio normato con la norma

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Si vede facilmente che se X e Y sono spazi completi anche $X \times Y$ è uno spazio completo.

DEFINIZIONE 3.5. – *Un operatore $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$, con X e Y spazi normati, si dice operatore chiuso se il suo grafico*

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = T(x)\},$$

è un sottoinsieme chiuso nello spazio normato $X \times Y$.

Vale il seguente teorema del grafico chiuso:

TEOREMA 3.5. – *Sia $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$, con X e Y spazi di Banach, un operatore lineare chiuso. Allora se $D(T)$ è chiuso si ha che T è limitato e quindi continuo.*

Dimostrazione. $\mathcal{G}(T)$ e $D(T)$ sono sottospazi chiusi di spazi completi e quindi sono essi stessi completi. Consideriamo

$$P : (x, T(x)) \in \mathcal{G}(T) \rightarrow x \in D(T).$$

L'applicazione P è lineare e limitata, infatti

$$\|P(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|.$$

Inoltre P è biettiva, dal teorema dell'applicazione aperta segue che $P^{-1}(x) = (x, T(x))$ è continua e limitata e quindi esiste $c > 0$ tale che

$$\|(x, T(x))\| \leq c\|x\|, \quad x \in X.$$

L'ultima relazione implica anche che l'operatore T è anche limitato, infatti

$$\|T(x)\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\| \leq c\|x\|.$$

OSSERVAZIONE 3.9. – *Tenendo conto dell'osservazione 8, il teorema 3.5 afferma che quando X è di Banach e $D(T) = X$, allora la norma detta del grafico $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$ è equivalente a $\|x\|_X$.*

Vale inoltre la seguente condizione necessaria e sufficiente per gli operatori chiusi.

TEOREMA 3.6. – *L'operatore lineare $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_k) \subset D(T)$ con $x_k \rightarrow x$ e $T(x_k) \rightarrow y$ si ha $x \in D(T)$ e $T(x) = y$.*

Dimostrazione. Sia T chiuso e $z_k = (x_k, T(x_k))$ convergente a $z = (x, y)$ allora necessariamente $y = T(x)$.

Viceversa se $(x_k, T(x_k))$ converge a $(x, T(x))$, si ha che $(x, T(x)) \in \overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(T)$ e quindi $\mathcal{G}(T)$ è un insieme chiuso.

Osserviamo esplicitamente che questa proprietà è differente dalla proprietà degli operatori limitati. Se un operatore lineare è limitato e quindi continuo, si ha che se x_n è una successione in $D(T)$ che converge in $D(T)$ allora anche $T(x_n)$ converge, e questo non è necessariamente vero per gli operatori chiusi.

OSSERVAZIONE 3.10. – *Se $D(T)$ non è chiuso il teorema 3.5 non è valido. A titolo d'esempio, consideriamo $X = C([0, 1])$, con la norma $\|u\| = \sup |u|$, definiamo*

$$D(T) = \{u \in C([0, 1]) : u' \in C([0, 1])\}$$

$$T : u \in D(T) \longrightarrow T(u) = u' \in C([0, 1]).$$

Abbiamo visto nell'osservazione 2 che T non è un operatore limitato.

Proviamo che T è chiuso.

Sia $(u_k, T(u_k))$ una successione che converge a (u, v) nella norma di C^0 , proviamo che $v = u'$. Si ha infatti, per la convergenza uniforme per passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ha:

$$u(t) - u(0) = \lim_k (u_k(t) - u_k(0)) = \lim_k \int_0^t u'_k(s) ds = \int_0^t v(s) ds$$

e quindi $u' = v$.

OSSERVAZIONE 3.11. – *Un operatore lineare chiuso non è detto sia limitato ed un operatore limitato non è detto che sia chiuso.*

Consideriamo ad esempio l'operatore identità $T : D(T) \rightarrow D(T)$, con $\overline{D(T)} = X$ che è lineare e continuo ma non è chiuso. Infatti se $x \in X - D(T)$ esiste una successione $(x_k) \subset D(T)$ che converge a $x \notin D(T)$.

Osserviamo che se T è un operatore lineare e limitato con dominio $D(T) \subset X$ si ha che

- *Se $D(T)$ è chiuso allora T è chiuso.*

Infatti se (x_k) è una successione di elementi di $D(T)$ che converge a $x \in D(T)$, si ha $T(x_k)$ converge a $T(x)$ e quindi T è chiuso.

- *Supponiamo T chiuso e Y completo allora $D(T)$ è chiuso.*

Sia $x \in \overline{D(T)}$ esiste una successione (x_k) di elementi di $D(T)$ che converge a x e dalla continuità di T segue:

$$\|T(x_k) - T(x_h)\| \leq c\|x_k - x_h\|,$$

allora $T(x_k)$ converge ad y e poiché è chiuso $y = T(x)$ e di conseguenza $x \in D(T)$ e $D(T)$ risulta chiuso.

Capitolo 4

Topologie deboli in spazi normati

4.1 Introduzione alle topologie deboli

Vediamo come si affronta il problema della ricerca del minimo per una funzione g definita in $A \subset \mathbb{R}^n$ ed a valori reali. Si determinano prima i punti stazionari di g cioè i punti x_0 che annullano il differenziale di g , $dg(x_0) = 0$. In un secondo momento si riconosce la natura del punto critico studiando le derivate seconde di g .

Un altro metodo è basato sulla nozione di continuità inferiore, per successioni:

DEFINIZIONE 4.1. – *Una funzione g si dice inferiormente semicontinua per successioni se per ogni successione $(x_k) \subset A$ convergente a un punto x_0 si ha*

$$g(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g(x_k).$$

L'esistenza del minimo è quindi assicurata dalla seguente generalizzazione del noto *Teorema di Weierstrass*:

Una funzione inferiormente semicontinua definita in un insieme chiuso e limitato (quindi compatto) ammette un punto di minimo.

Il Teorema di Weierstrass si basa sulla proprietà che in $\mathbb{R}$ tutte le successioni limitate hanno un estratta convergente. Questo è valido solo negli spazi a dimensione finita, per ottenere un risultato utile negli spazi a dimensione infinita è necessario introdurre una nuova topologia.

A titolo d'esempio introduciamo il procedimento dei Metodi Diretti, utilizzato per determinare i minimi di funzionali.

Sia assegnato il funzionale $I : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$, con $\mathbf{U}$ sottospazio di uno spazio topologico X , diremo che I è *sequenzialmente semicontinuo inferiormente* per successioni rispetto alla topologia τ , definita in $\mathbf{U}$, se per ogni successione $(u_h)_h$ contenuta in $\mathbf{U}$, convergente ad una funzione u_0 nella topologia τ , si ha

$$I(u) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h).$$

Consideriamo il funzionale I definito in $\mathbf{U}$, dotato della topologia τ , vogliamo studiare il seguente problema

PROBLEMA 4.1. —

$$(P) \quad \inf \{I(u), \quad u \in \mathbf{U}\} = m.$$

Il procedimento dei Metodi Diretti consiste dei seguenti passi:

- (a) provare che l'estremo inferiore m di I in $\mathbf{U}$ è finito;
- (b) provare l'esistenza di una successione minimizzante di I in $\mathbf{U}$, cioè una successione $(u_h)_h$ tale che

$$m = \lim_{h \rightarrow \infty} I(u_h),$$

che converge o ammette una sottosuccessione convergente ad una funzione $u_0 \in \mathbf{U}$ nella topologia τ .

- (c) garantire la semicontinuità inferiore del funzionale I .

Quando queste condizioni sono soddisfatte, si ottiene

$$I(u_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h) = m.$$

e segue che u_0 è un minimo di I in $\mathbf{U}$.

Si riconosce che la nozione di semicontinuità, più debole di quella di continuità, è quella giusta per la ricerca del minimo.

Tuttavia rimane il problema di determinare nella classe $\mathbf{U}$ un' opportuna topologia in cui le successioni minimizzanti convergono, siano dunque compatte (una topologia quindi con pochi aperti) ma rispetto alla quale il funzionale I sia semicontinuo (di conseguenza la topologia deve avere abbastanza aperti).

Ricordiamo che:

DEFINIZIONE 4.2. — **Sia X un insieme non vuoto, e siano τ e τ' due topologie in X . Diremo che τ è più fine di τ' , $\tau' \subset \tau$, se per ogni**

$x \in X$ la famiglia degli intorni di x nella topologia τ' è contenuta nella famiglia degli intorni nella topologia τ .

Se raffiniamo la topologia in X , la sostituiamo con una più fine ogni intorno della prima è anche intorno nella seconda, di conseguenza aumentano gli intorni e quindi gli aperti ma diminuisce la famiglia dei compatti, quella delle successioni convergenti e dei compatti per successione. Ci chiediamo cosa succede per la continuità di una funzione. Si vede facilmente che se raffiniamo la topologia, la classe delle funzioni continue in X aumenta e anche quella delle semicontinue inferiormente. Si vede per esempio che nella topologia banale le uniche funzioni continue sono le funzioni costanti mentre nella topologia discreta tutte le funzioni sono continue.

Queste considerazioni portano a concludere che per avere molti sottoinsiemi compatti o compatti per successione occorre che la topologia in X sia molto debole (la meno fine) per ottenere invece funzioni continue o anche sequenzialmente continue occorre che la topologia sia molto fine. Il Metodo Diretto richiede quindi due condizioni in apparente conflitto.

Tuttavia se X è uno spazio è normato un ottimo compromesso è costituito dalla topologia debole.

4.2 Topologia debole $\sigma(X, X^*)$

Sia dato X uno spazio normato e X^* l'insieme dei funzionali lineari e continui su X . Siano $F_1, F_2, \dots, F_n$ è una collezione finita di elementi di X^* , per $\epsilon > 0$ l'insieme definito da

$$\{x \in X : |F_i(x)| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \quad (4.2.1)$$

è aperto e contiene il punto 0 e definisce un intorno del punto 0.

L'intersezione di due intorni del tipo (4.2.1) contiene sempre un insieme della stessa forma ed è quindi possibile definire in X una topologia per cui questa famiglia di insiemi $I(0)$ costituisce un sistema fondamentale di intorni per 0.

Inoltre per ogni $x_0 \in X$, la famiglia $x_0 + I(0)$ costituisce un sistema fondamentale di intorni per x_0 , e quindi un intorno di x_0 è dato da

$$U = \{x \in X : |F_i(x - x_0)| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

con $F_1, F_2, \dots, F_n$ un numero finito di elementi di X^* e $\epsilon > 0$. Gli insiemi di questa forma costituiscono una base di intorni per il punto x_0 .

La topologia determinata da questi intorni viene chiamata *topologia debole* di X e si denota con $\sigma(X, X^*)$. La topologia generata dalla norma viene detta *topologia forte*.

Di conseguenza i sottoinsiemi di X della forma:

$$A = \{x \in X : |F_i(x)| < \alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

per ogni numero finito di funzionali $F_1, F_2, \dots, F_n$ e $\alpha > 0$, sono aperti della topologia debole, che contengono 0.

Osserviamo che ogni $F \in X^*$ è continuo rispetto alla topologia debole, infatti per ogni $\epsilon > 0$, se scelgo l'intorno I di 0, determinato da F e $\epsilon > 0$, segue che $|F(x)| < \epsilon$, per ogni $x_0 \in I$.

Si vede che la topologia che abbiamo costruito è la topologia meno fine che si può definire in X , che mantiene la continuità dei funzionali e quindi non modifica lo spazio duale.

È evidente che ogni insieme aperto nella topologia debole è anche aperto rispetto alla topologia forte ma in generale non è vero il viceversa, dal momento che gli insiemi che abbiamo definito in (4.2.1) non costituiscono rispetto alla topologia della norma un sistema fondamentale di intorni del punto 0.

Proviamo che la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ è separata e che quindi per ogni coppia di punti x_1, x_2 distinti è possibile costruire due aperti A_1, A_2 con $x_1 \in A_1$ e $x_2 \in A_2$ disgiunti.

Consideriamo i due insiemi $\{x_1\}$ e $\{x_2\}$, dal teorema 2.6, sulla stretta separazione dei convessi, sono separati in senso stretto, e quindi esiste un funzionale $F \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $F(x_1) < \alpha < F(x_2)$, allora $A_1 = F^{-1}((-\infty, \alpha))$ e $A_2 = F^{-1}((\alpha, +\infty))$ sono due intorni disgiunti di x_1 e x_2 .

In generale la topologia debole non verifica il primo assioma di numerabilità e quindi non è una topologia metrizzabile (non è descrivibile attraverso la convergenza delle successioni) tuttavia la convergenza delle successioni in questa topologia gioca un ruolo estremamente importante.

La convergenza nella topologia debole viene chiamata *convergenza debole* e si indica con $\xrightarrow{w}$, la convergenza definita nella topologia della norma si chiama *convergenza forte* e si indica $\xrightarrow{s}$.

Vale la seguente caratterizzazione della convergenza debole.

TEOREMA 4.1. — *Una successione $(x_k) \subset X$ converge debolmente a x_0 , denotato come $x_k \xrightarrow{w} x_0$, se e solo se per ogni $F \in X^*$ la successione di numeri reali $F(x_k)$ converge a $F(x_0)$.*

Dimostrazione. Si può assumere $x_0 = 0$. Supponiamo che per ogni $F \in X$ la successione $F(x_k)$ converge a $F(0) = 0$. Comunque scelgo $F_1, \dots, F_n$ elementi di X^* , si ha per $\epsilon > 0$ esiste $k_{0,i}$ tale che per ogni $k \geq k_{0,i}$

$$|F_i(x_k)| < \epsilon,$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Quindi per ogni intorno U di 0 nella topologia debole si ha che $x_k \in U$ per $k > k_0 = \text{Max}\{k_{0,1}, \dots, k_{0,n}\}$.

Inversamente, se per ogni intorno U di 0 nella topologia debole esiste k_0 tale che per ogni $k \geq k_0$ sia $x_k \in U$, è ovvio che qualunque sia $F \in X^*$, la successione $(F(x_k))$ tende a 0

La convergenza debole di una successione soddisfa le seguenti proprietà.

- Se (x_k) converge a x_0 nella topologia forte converge a x_0 anche nella topologia debole.

Infatti:

$$|F(x_k) - F(x_0)| \leq \|F\| \|x_k - x_0\|$$

- Se (x_k) converge nella topologia debole allora è limitata in norma: esiste M tale che $\|x_k\| \leq M$, $k \geq k_0$.

Infatti basta osservare che se (x_k) converge nella topologia debole, per ogni $F \in X^*$, la successione di numeri reali $F(x_k)$ è limitata e quindi per il Corollario 2 di Banach-Steinhaus la successione (x_k) è limitata nella norma di X .

Si ha anche che ogni insieme limitato nella topologia debole è anche limitato rispetto a quella forte. Infatti B è limitato nella topologia debole se per ogni $x \in B$, $|F(x)| \leq M_F$, per ogni $F \in X^*$ e quindi anche limitato in norma.

- Se (x_k) converge nella topologia debole a x_0 allora

$$\|x_0\| \leq \liminf_k \|x_k\|.$$

Si ha infatti per ogni $F \in X^*$ e per ogni k vale che $|F(x_k)| \leq \|F\| \|x_k\|$, passando al limite si ottiene:

$$\frac{|F(x_0)|}{\|F\|} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|,$$

e quindi dalla formula (2.2.4) duale per la norma di x_0 segue la tesi.

- Se (x_k) converge nella topologia debole a x_0 e (F_k) converge a F in X^* allora

$$\lim_k F_k(x_k) = F(x_0) \quad (4.2.2)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} |F_k(x_k) - F(x_0)| &\leq |F_k(x_k) - F(x_k)| + |F(x_k) - F(x_0)| \leq \\ &\leq \|x_k\| \|F_k - F\| + |F(x_k) - F(x_0)|. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che (x_k) è limitata in norma segue (4.2.2).

OSSERVAZIONE 4.1. — *Se lo spazio X ha dimensione finita allora le topologie forte e debole coincidono. Dobbiamo verificare che un aperto nella topologia forte è anche un aperto nella topologia debole.*

Sia $x_0 \in X$ e U un intorno di x_0 per la topologia forte. Proviamo che esiste un intorno V di x_0 nella topologia debole tale che $V \subset U$, quindi U è un intorno di x_0 nella topologia debole. Sia $x_0 = 0$ e $B(0, r)$ la palla di centro 0 e raggio r e proviamo che esiste un intorno V di 0 nella topologia debole tale che $V \subset B$.

Siano $F_i = dx_i$ gli elementi della base canonica in X^ e*

$$V = \left\{ x \in X : |dx_i(x)| = |x_i| < \frac{r}{n}, \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

allora se $x \in V$ vale

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq r,$$

e quindi $x \in B$.

Proviamo che in R^n la convergenza debole e forte coincidono. Infatti per la convergenza debole in R^n , per ogni F , $F(x_k) \rightarrow F(x_0)$ per ogni $F \in (R^n)^$. In particolare per la base canonica in $(R^n)^*$ si ha $dx_i(x_k) = (x_k)_i \rightarrow dx_i(x_0) = (x_0)_i$ e quindi (x_k) converge nella topologia forte di R^n . Se $(x_k)_i \rightarrow (x_0)_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$ allora significa che $dx_i(x_k) = (x_k)_i \rightarrow (x_0)_i$, allora poiché ogni altro funzionale lineare e continuo ha, per ogni $u \in R^n$ la forma $F(u) = \sum a_i dx_i(e_i)$, dove (e_i) denota la base canonica in R^n , si ha*

$$\lim_k F(x_k) = \sum a_i dx_i(x_0) = F(x_0).$$

OSSERVAZIONE 4.2. — *In uno spazio a dimensione infinita la topologia debole è strettamente meno fine della topologia forte.*

A titolo d'esempio, consideriamo lo spazio $C^0([a, b])$, Se g_k converge debolmente a g_0 allora dalle proprietà della convergenza debole

$$\|g_k\|_{C^0} \leq M$$

e poiché per ogni F , funzionale lineare e continuo in $C^0([a, b])$, deve valere $F(g_k) \rightarrow F(g_0)$ in particolare se prendiamo $F = \delta_{t_0}$ si ha

$$\lim_k \delta_{t_0}(g_k) = \delta_{t_0}(g_0),$$

al variare di $t_0 \in [a, b]$, segue che la successione converge puntualmente a g_0 .

Si può provare che se una successione di funzioni continue è equi-limitata e puntualmente convergente in $[a, b]$, converge nella topologia debole di $C^0([a, b])$. La convergenza debole è diversa dalla convergenza forte che in questo caso è la convergenza uniforme.

Abbiamo visto che gli aperti ed i chiusi della topologia debole sono aperti e chiusi anche della topologia forte. Quando lo spazio X è a dimensione infinita esistono degli insiemi aperti e chiusi per la topologia forte che non sono aperti o chiusi della topologia debole.

Si ha infatti che (per le dimostrazioni, Brezis, cap. III)

- l'insieme $S(0, 1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, non è mai chiuso nella topologia debole.
- l'insieme $B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ non è mai aperto nella topologia debole.

Tuttavia nel caso di insiemi convessi vale il seguente teorema, che è una importante conseguenza del risultato di stretta separazione di convessi contenuto nel teorema 2.6.

TEOREMA 4.2. – ***Sia C un convesso di X . Allora C è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso.***

Dimostrazione. Proviamo che se C è fortemente chiuso è anche debolmente chiuso, verificando che $X - C$ è un aperto nella topologia debole. Sia $x_0 \notin C$, esiste quindi un iperpiano chiuso che separa strettamente x_0 e C , quindi $F \in X^*$ e α tali che

$$F(x_0) < \alpha < F(y)$$

per ogni $y \in C$. Posto

$$V = \{x \in X : F(x) < \alpha\},$$

si ha che V è un aperto nella topologia debole, $x_0 \in V$ e $V \subset (X - C)$, quindi $X - C$ aperto in $\sigma(X, X^*)$.

Studiamo le proprietà degli insiemi compatti. Abbiamo visto che ogni insieme chiuso e limitato di R^n è compatto. Questa caratterizzazione non è più vera negli spazi a dimensione infinita, esistono sottoinsiemi chiusi e limitati che non sono compatti.

OSSERVAZIONE 4.3. – **Consideriamo** $C([0, 1])$ e

$$B = \{f \in C([0, 1]) : \|f\|_{C([0, 1])} \leq 1\}$$

e la successione di funzioni:

$$f_n(t) = t^n$$

si ha che $\|f_n\| = \sup |t^n| \leq 1$ e quindi $f_n \in B$. È noto che la successione $f_n(t)$ converge puntualmente ma non uniformemente alla funzione $f(t) = 0$ per $0 \leq t < 1$ e $f(1) = 1$. Osserviamo che dalla successione f_n non è possibile estrarre nessuna sottosuccessione convergente in $C([0, 1])$, infatti se esistesse f_{n_k} convergente uniformemente a g , per l'unicità del limite $g = f$ e questo è impossibile dal momento che g deve essere continua.

Nel seguito indichiamo con

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad (4.2.3)$$

Vale il seguente teorema di Riez (per la dimostrazione rimandiamo a Brezis, Teorema VI.5):

TEOREMA 4.3. – *Sia X uno spazio vettoriale normato tale che l'insieme B_X in (4.2.3) sia compatto nella topologia della norma, allora X è a dimensione finita.*

Tuttavia se X è a dimensione infinita ma riflessivo vale

TEOREMA 4.4. – *Sia X uno spazio di Banach. X è riflessivo se e solo se l'insieme B_X in (4.2.3) è compatto nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Il teorema precedente, per la cui dimostrazione rimandiamo a Brezis (Teorema di Kakutami, Brezis, Teorema III.16), rende di notevole importanza la costruzione della topologia debole.

Il seguente risultato di compattezza negli spazi riflessivi segue dal teorema precedente:

TEOREMA 4.5. – *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $K \subset X$ un convesso, chiuso e limitato. Allora K è compatto nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Dimostrazione. Dal momento che K è convesso e chiuso è anche chiuso nella topologia debole. Inoltre dal momento che è limitato, esiste m , tale che $K \subset mB_X$, quindi è un sottoinsieme chiuso di un insieme compatto ed è quindi anche compatto.

Diamo ora un'applicazione dei precedenti risultati all'esistenza del minimo di una funzione convessa e semicontinua inferiormente.

DEFINIZIONE 4.3. *–Diremo che $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è una funzione semicontinua inferiormente rispetto ad una topologia τ se per ogni $\lambda \in R$ l'insieme*

$$E(\varphi, \lambda) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \lambda\},$$

è chiuso in τ .

Si noti che una funzione φ semicontinua inferiormente lo è anche per successioni. Sia $x_k \in X$ convergente a x_0 nella topologia in cui φ è semicontinua inferiormente. Supponiamo

$$\liminf_k \varphi(x_k) = c \neq +\infty$$

e sia x_{k_h} la successione estratta da x_k tale che

$$\lim \varphi_{k_h}(x_{k_h}) = c$$

Dal momento che per ogni $\epsilon > 0$ esiste h_0 tale che:

$$\forall h > h_0 \quad c - \epsilon < \varphi(x_{k_h}) < c + \epsilon \implies x_{k_h} \in E(\varphi, c + \epsilon) \implies x_0 \in E(\varphi, c + \epsilon)$$

segue che

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_k \varphi(x_k) + \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

Osserviamo che la semicontinuità per successioni è equivalente alla semicontinuità solo se X soddisfa il primo assioma della numerabilità e cioè solo se ogni punto possiede un sistema fondamentale d'intorni numerabile, quindi in particolare se X è uno spazio metrico.

Dal teorema 4.2 segue la seguente proprietà delle funzioni convesse ed inferiormente semicontinue:

TEOREMA 4.6. *–Sia $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, inferiormente semicontinua (per la topologia forte). Allora φ è inferiormente semicontinua anche per la topologia debole. In particolare, se $x_k \rightarrow x_0$ nella topologia debole, allora*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_k \varphi(x_k)$$

Dimostrazione. Dal momento che φ è convessa ed inferiormente semicontinua rispetto alla topologia forte, per ogni λ l'insieme $E(\varphi, \lambda)$ è un convesso chiuso nella topologia forte e quindi dal teorema 4.2 anche chiuso rispetto alla topologia debole. Segue che φ è inferiormente semicontinua, anche per successioni, rispetto alla topologia debole.

Si ha quindi il seguente risultato di esistenza di minimo, che mette in evidenza il ruolo essenziale degli spazi riflessivi e delle funzioni convesse nella ricerca dei minimi.

TEOREMA 4.7. – *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e C un convesso, chiuso e non vuoto di X e $\varphi : C \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, inferiormente semicontinua, $\varphi \neq +\infty$ e tale che*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty. \quad (4.2.4)$$

Allora φ raggiunge il suo minimo su C : esiste $x_0 \in C$ tale che $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$, per ogni $x \in C$.

Dimostrazione. Sia $a \in C$ tale che $\lambda_0 = \varphi(a) < +\infty$ e consideriamo

$$C_0 = \{x \in C : \varphi(x) \leq \lambda_0\}.$$

L'insieme C_0 è convesso e chiuso, inoltre dalla condizione (4.2.4) di crescita di φ all'infinito C_0 è limitato e dunque è compatto nella topologia debole. Applicando il teorema 4.27 dell'Appendice, segue che φ raggiunge il suo minimo in C_0 , esiste x_0 tale che $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)$, per ogni $x \in C_0$.

Da altra parte, in $x \in C - C_0$ si ha $\varphi(x_0) \leq \varphi(a) = \lambda_0 \leq \varphi(x)$.

Ricordiamo che uno spazio metrico X è separabile se esiste un sottoinsieme $D \subset X$ numerabile denso.

La proprietà di separabilità degli spazi è strettamente legata alla metrizzabilità delle topologie deboli. In generale negli spazi a dimensione infinita $\sigma(X, X^*)$ non è una topologia metrizzabile. Tuttavia se X^* è separabile si riesce a costruire su B_X una metrica che induce su B_X la stessa topologia indotta dalla topologia debole su B_X . Vale infatti (Brezis, Teorema III.25'):

TEOREMA 4.8. – *Sia X uno spazio di Banach tale che X^* sia separabile. Allora, la sfera unitaria di X , B_X , è metrizzabile per la topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Vale anche il seguente importante e generale risultato di compattezza per successioni nella topologia debole (Brezis, Teorema III.27)

TEOREMA 4.9. – *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia (x_k) una successione limitata in norma. Allora esiste un successione estratta che converge per la topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

4.3 Topologia debole $*\sigma(X^*, X)$

Sia X uno spazio di Banach e X^* il suo duale, munito della norma, quindi gli elementi di un sistema fondamentale di intorni dello O (il funzionale identicamente nullo) è dato da:

$$U_\epsilon = \left\{ F \in X^* : \|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)| \leq \epsilon \right\},$$

oppure in modo equivalente

$$U_{\epsilon, A} = \{F \in X^* : \|F\| = \sup_{x \in A} |F(x)| \leq \epsilon\},$$

dove A è un insieme limitato di X . Se consideriamo al posto degli insiemi limitati tutti i sottoinsiemi finiti di X e cioè

$$I_\epsilon = \{F \in X^* : |F(x_i)| \leq \epsilon \quad x_1, \dots, x_n \in X\},$$

otteniamo un sistema fondamentale di intorni in una topologia in X^* meno fine di quella della norma che viene chiamata *topologia debole ** e denotata con $*\sigma(X^*, X)$.

La topologia debole $*\sigma(X^*, X)$ è la topologia meno fine che rende continue le seguenti applicazioni definite in X^* :

$$\varphi_x : F \in X^* \rightarrow F(x) \in \mathbb{R},$$

al variare di $x \in X$.

La topologia debole $*\sigma(X^*, X)$ è separata e con argomenti simili a quelli utilizzati nel Teorema 4.1 si dimostra la seguente caratterizzazione delle successioni convergenti in $*\sigma(X^*, X)$:

TEOREMA 4.10. — *Una successione $(F_k) \subset X^*$ converge nella topologia debole $*\sigma(X^*, X)$ a F_0 se e solo se la successione numerica $(F_k(x))$ converge a $F_0(x)$ per ogni $x \in X$.*

La convergenza debole in $*\sigma(X^*, X)$ soddisfa le seguenti proprietà.

- Se (F_k) converge nella topologia forte di X^* converge anche nella topologia debole $*\sigma(X^*, X)$.
- Se (F_k) converge nella topologia debole $*\sigma(X^*, X)$, allora è limitata in norma, quindi esiste M tale che $\|F_k\|_{X^*} \leq M$.
- Se (F_k) converge nella topologia debole $*\sigma(X^*, X)$ a F_0 allora

$$\|F_0\|_{X^*} \leq \liminf_k \|F_k\|_{X^*}.$$

- Se (F_k) converge nella topologia debole ${}^*\sigma(X^*, X)$ a F_0 e (x_k) converge a x_0 nella topologia della norma di X allora

$$\lim_k F_k(x_k) = F(x_0).$$

OSSERVAZIONE 4.4. — *Osserviamo che lo spazio duale X^* si può considerare in duplice modo: sia come spazio duale di X sia come spazio normato e definire il relativo spazio duale X^{**} . Quindi in X^* si può introdurre sia ${}^*\sigma(X^*, X)$, la topologia debole * , definendo gli intorni di 0 come*

$$I_\epsilon = \{F \in X^* : |F(x_i)| \leq \epsilon, \quad x_1, \dots, x_n \in X\},$$

e anche la topologia debole $\sigma(X^, X^{**})$ dove gli intorni di 0 sono definiti da*

$$J_\epsilon = \{F \in X^* : |\phi_i(F)| \leq \epsilon, \quad \phi_1, \dots, \phi_n \in X^{**}\},$$

È evidente che nel caso di uno spazio X riflessivo le due topologie su X^ coincidono.*

I seguenti due risultati sono di grande rilevanza nelle applicazioni (Brezis, Teorema III.15 e Teorema III.25):

TEOREMA 4.11. — ***L'insieme***

$$B_{X^*} = \{F \in X^* : \|F\| \leq 1\},$$

è compatto nella topologia debole ${}^\sigma(X^*, X)$.*

TEOREMA 4.12. — *Sia X uno spazio di Banach separabile. Allora B_{X^*} è metrizzabile nella topologia debole ${}^*\sigma(X^*, X)$. Reciprocamente se B_{X^*} è metrizzabile in ${}^*\sigma(X^*, X)$, allora X è separabile.*

Vale inoltre:

TEOREMA 4.13. — *Sia X uno spazio di Banach separabile e sia (F_k) una successione limitata in X^* . Allora esiste una successione estratta che converge nella topologia ${}^*\sigma(X^*, X)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $\|F_k\| \leq 1$, per ogni k . Dal momento che l'insieme B_{X^*} è compatto e metrizzabile in ${}^*\sigma(X^*, X)$, segue la tesi.

Esempio 4.1 *Sia $X = C^0([-1, 1])$, costruiamo una successione di funzionali che converge nella topologia debole * al funzionale δ_0 .*

Siano f_k una successione di funzioni continue in $[-1, 1]$ tali che

1. $f_k(t) = 0$ per $|t| > \frac{1}{k}$,
2. $f_k(t) \geq 0$,
3. $\int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} f_k(t) dt = 1$.

Consideriamo la successione di funzionali in $C^0([-1, 1])$ definiti da

$$F_k(u) = \int_{-1}^1 f_k(t) u(t) dt.$$

Per ogni $u \in C^0([-1, 1])$, dal teorema della media esiste $a_k \in [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ tale che

$$F_k(u) = u(a_k) \int_{-1}^1 f_k(t) dt = u(a_k),$$

si può quindi concludere che per ogni $u \in C^0([-1, 1])$

$$\lim_k F_k(u) = \lim_k u(a_k) = u(0) = \delta_0(u),$$

che implica $F_k \xrightarrow{w*} \delta_0$.

4.4 Spazi L^p e Topologie deboli

In questo paragrafo studiamo la definizione e le proprietà della topologia debole negli spazi L^p .

Introduciamo brevemente gli spazi L^p , delle funzioni sommabili con esponente p .

DEFINIZIONE 4.4. *— Sia $1 \leq p < +\infty$ ed Ω aperto di R^n . Si indica con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili tali che*

$$\|u\|_p = \left\{ \int |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (4.4.5)$$

e con $L^\infty(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili tali che

$$|u(x)| \leq C \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega, \quad (4.4.6)$$

con la norma definita da:

$$\|u\|_\infty = \inf \{C : |u(x)| \leq C \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega\}. \quad (4.4.7)$$

Osserviamo che gli elementi di L^p non sono funzioni ma classi di equivalenza: due funzioni sono equivalenti se differiscono su un insieme di misura nulla. Vale la seguente disuguaglianza di Holder.

TEOREMA 4.14. – **Siano** $u \in L^p$ **e** $v \in L^q$ **con** $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, **allora** $uv \in L^1$ **ed inoltre vale la seguente disuguaglianza:**

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \left\{ \int_{\Omega} |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{\Omega} |v|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (4.4.8)$$

Dimostrazione. la disuguaglianza è ovvia se $p = 1$ e $q = +\infty$. Dalla disuguaglianza di Young:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad a, b > 0$$

si ha

$$|uv| \leq \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q$$

che implica che $uv \in L^1(\Omega)$. Integrando

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{1}{q} \|v\|^q,$$

Sostituendo u con λu si ottiene

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|u\|^p + \frac{1}{\lambda q} \|v\|^q$$

Scegliendo $\lambda = (\|u\|)^{-1} \|v\|^{\frac{q}{p}}$, si ha (4.4.8).

Valgono le seguenti proprietà.

- $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach munito della norma (4.4.5) se $1 \leq p < +\infty$ e della norma (4.4.7), quando $p = +\infty$.
- Sia $(u_j), u \in L^p$ tale che $\|u_j - u\| \rightarrow 0$, allora esiste una successione estratta (u_{j_k}) ed una funzione $h \in L^p$ tali che

$$u_{j_k} \rightarrow u \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega,$$

e

$$|u_{j_k}| \leq h(x) \quad \text{q.o.} \quad x \in \Omega,$$

- Se $|\Omega| < +\infty$, allora per $1 \leq p \leq r$ vale che $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, con inclusione topologica, nel senso che la topologia di $L^r(\Omega)$ è più fine della topologia di $L^p(\Omega)$. Dalla disuguaglianza di Holder segue che

$$\|u\|_p \leq (|\Omega|)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|u\|_r.$$

dove $|\Omega|$ denota la misura di Lebesgue di Ω .

- Introduciamo la nozione di supporto di una funzione definita ovunque in un aperto Ω , eventualmente tutto R^n .

Il supporto di una funzione f è il complementare del più grande aperto in cui f si annulla.

Quindi $\text{Supp } f$ è la chiusura dell'insieme $\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$.

Vale che per $1 \leq p < +\infty$, lo spazio $C_0^0(\Omega)$ delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in Ω , è denso in $L^p(\Omega)$ e quindi per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^0(\Omega)$ tale che $\|u - g\| < \tau$.

- Per $1 \leq p < +\infty$ lo spazio delle funzioni costanti a tratti è denso in $L^p(\Omega)$ e quindi per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e $\tau > 0$ esiste una funzione costante a tratti g tale che $\|u - g\| < \tau$.
- Per $1 \leq p < +\infty$ allora lo spazio L^p è separabile

Le proprietà di questi spazi normati dipendono dall'esponente p .

1. Lo spazio L^p con $1 < p < +\infty$.

Vale il seguente teorema di rappresentazione dei funzionali:

TEOREMA 4.15. *—Sia $1 < p < +\infty$ e $F \in (L^p)^*$, allora esiste un unico $v \in L^q$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ tale che per ogni $u \in L^p$*

$$F(u) = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

ed inoltre

$$\|v\|_{L^q} = \|F\|_{(L^p)^*}.$$

Il teorema precedente è molto importante ed esprime il fatto che ogni funzionale lineare e continuo su L^p , con $1 < p < +\infty$, si rappresenta mediante una funzione di L^q . L'operatore $F \in (L^p)^* \rightarrow L^q$ è lineare, isometrico e suriettivo e permette l'identificazione dei due spazi $(L^p)^* = L^q$.

Da quanto detto segue la seguente caratterizzazione di convergenza debole di una successione di elementi di L^p :

Una successione $(u_j) \in L^p(\Omega)$ converge a u nella topologia debole $\sigma(L^p, L^q)$, se e solo se per ogni $v \in L^q$ si ha

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j v \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

TEOREMA 4.16. — **Sia** $1 < p < +\infty$ **allora lo spazio** L^p **è riflessivo.**

Dalla proprietà di riflessività per il Teorema 4.9 segue:

TEOREMA 4.17. — **Sia** $1 < p < +\infty$ **e** $(u_j) \in L^p(\Omega)$ **limitata nella norma, allora esiste una successione estratta** (u_{j_k}) **che converge a** u **nella topologia debole** $\sigma(L^p, L^q)$.

2. Lo spazio L^1 .

TEOREMA 4.18. — **Sia** $F \in (L^1)^*$, **allora esiste un unico** $v \in L^\infty$ **dove tale che per ogni** $u \in L^1$

$$F(u) = \int_{\Omega} uv \, dx,$$

ed inoltre

$$\|v\|_{L^\infty} = \|F\|_{(L^1)^*}.$$

Il teorema precedente asserisce che tutti i funzionali lineari e continui su L^1 si rappresentano mediante una funzione di L^∞ . L'operatore $F \in (L^1)^* \rightarrow L^\infty$ è lineare, isometrico e suriettivo e permette l'identificazione dei due spazi $(L^1)^* = L^\infty$. Si ha quindi:

Una successione $(u_j) \in L^1(\Omega)$ converge a u nella topologia debole $\sigma(L^1, L^\infty)$, se e solo se per ogni $v \in L^\infty$ si ha

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j v \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

OSSERVAZIONE 4.5. — **Proviamo con un esempio che lo spazio** L^1 **non è uno spazio riflessivo. Sia** $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ **e** $u_j = \alpha_j \chi_{B(0, \frac{1}{j})}$ **dove** $\chi_{B(0, \frac{1}{j})}$ **rappresenta la funzione caratteristica della sfera** n -**dimensionale di centro** 0 **e raggio** $\frac{1}{j}$. **Per** j **sufficientemente grande** $B(0, \frac{1}{j})$ **è contenuto in** Ω **e scegliamo** $\alpha_j > 0$ **in modo tale che** $\|u_j\|_1 = 1$, **per ogni** j . **Se** L^1 **fosse riflessivo dovrebbe esistere una sottosuccessione, che per semplicità indichiamo ancora con** u_j , **convergente debolmente in** $\sigma(L^1, L^\infty)$ **verso una funzione** $u_0 \in L^1$ **e dunque**

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j v \, dx = \int_{\Omega} u_0 v \, dx,$$

per ogni $v \in L^\infty$. **Scegliendo** $v = 1$ **segue che**

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j dx = 1 = \int_{\Omega} u_0 dx.$$

Fissato n sia $j > n$ allora, poiché $B(0, \frac{1}{j}) \subset B(0, \frac{1}{n})$, segue

$$\int_{\Omega} u_j \chi_{B(0, \frac{1}{n})} dx = \int_{B(0, \frac{1}{j})} u_j dx + \int_{B(0, \frac{1}{n}) - B(0, \frac{1}{j})} u_j dx + \int_{\Omega - B(0, \frac{1}{n})} u_j dx = 1,$$

dalla convergenza debole, poiché $\chi_{B(0, \frac{1}{n})} \in L^{\infty}$ si ha

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j \chi_{B(0, \frac{1}{n})} dx = 1 = \int_{\Omega} u_0 \chi_{B(0, \frac{1}{n})} dx$$

L'ultima relazione è impossibile in quanto la successione $w_n = u_0 \chi_{B(0, \frac{1}{n})}$ converge q.o. verso la funzione 0 e $|u_0 \chi_{B(0, \frac{1}{n})}| \leq |u_0|$ quindi dal teorema della convergenza dominata segue:

$$\lim_n \int_{\Omega} u_0 \chi_{B(0, \frac{1}{n})} dx = 0.$$

3. Lo spazio L^{∞}

Lo spazio L^{∞} è il duale di L^1 , e quindi in L^{∞} si può introdurre la topologia debole $^{*}\sigma(L^{\infty}, L^1)$.

Vale quindi la seguente caratterizzazione della convergenza debole * per una successione di elementi di L^{∞} :

Una successione $(u_j) \in L^{\infty}(\Omega)$ converge a u nella topologia debole $^{*}\sigma(L^1, L^{\infty})$, se e solo se per ogni $v \in L^1$ si ha

$$\lim_j \int_{\Omega} u_j v dx = \int_{\Omega} u v dx.$$

Dalle proprietà delle topologie deboli * si ha che:

- La sfera unitaria di L^{∞} è compatta per la topologia $^{*}\sigma(L^1, L^{\infty})$.
- Dal momento che L^1 è separabile, se (u_j) è una successione limitata nella norma di L^{∞} allora ammette una sottosuccessione convergente nella topologia $^{*}\sigma(L^1, L^{\infty})$.

Lo spazio L^{∞} **non è uno spazio riflessivo**, il suo duale contiene strettamente L^1 , infatti esistono funzionali lineari e continui su L^{∞} che non possono essere rappresentati attraverso funzioni di L^1 quindi $L^1 \subsetneq (L^{\infty})^{*}$.

Costruiamo un funzionale di questo tipo. Sia $\Omega = (-1, 1)$ e consideriamo il funzionale lineare e continuo $\delta_0(u) = u(0)$, per $u \in C_0^0([-1, 1])$.

Dal Teorema di Hahn-Banach esiste un prolungamento F di tale funzionale in $L^\infty(-1, 1)$. Supponiamo che esista $\bar{v} \in L^1(-1, 1)$ tale che per ogni $u \in L^\infty(-1, 1)$ valga

$$F(u) = \int_{-1}^1 u(t) \bar{v}(t) dt.$$

La relazione precedente deve valere in particolare per le funzioni $u \in C_0^0([-1, 1] - \{0\})$, per le quali $u(0) = 0$, e quindi

$$\int_{-1}^1 u(t) \bar{v}(t) dt = \delta_0(u) = u(0) = 0.$$

Per completare la dimostrazione abbiamo bisogno del seguente *Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni* di cui daremo la prova nel prossimo paragrafo.

TEOREMA 4.19. —, **Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1(\Omega)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$**

$$\int_{\Omega} f(x) g(x) dx = 0,$$

allora $f(x) = 0$ q.o. in Ω .

DaL Teorema 4.19, segue che $\bar{v} = 0$ q.o. in $(-1, 1) - \{0\}$ e quindi q.o. in $(-1, 1)$. Di conseguenza F risulterebbe il funzionale identicamente nullo in contraddizione con la definizione δ_0 in C^0 .

Le proprietà degli spazi L^p possono essere riassunti nel seguente modo:

- Per $1 < p < +\infty$, L^p è uno spazio separabile e riflessivo ed il suo duale è L^q con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- Lo spazio L^1 è separabile, non è riflessivo e il suo spazio duale è L^∞ .
- Lo spazio L^∞ non è separabile nè riflessivo ed il suo spazio duale (che coincide con lo spazio delle misure di Radon) contiene strettamente L^1 .

Diamo qualche esempio di successioni debolmente convergenti in L^p e non convergenti in norma.

Esempio 4.2 Sia $\Omega = (0, 1)$ e definiamo:

$$u_n(x) = \begin{cases} n^\alpha & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1) \end{cases}$$

Si vede facilmente che u_n converge a 0 in norma L^p per $0 < \alpha < \frac{1}{p}$, infatti

$$\|u_n\|_{L^p}^p = \int_0^{\frac{1}{n}} n^{\alpha p} dx = n^{\alpha p - 1}.$$

Dalla relazione precedente segue che per $\alpha = \frac{1}{p}$ si ha $\|u_n\|_{L^p} = 1$ ed in questo caso si dimostra che la successione u_n converge debolmente a 0. Infatti, per ogni $v \in L^q$ si ha

$$\int_0^1 u_n v dx = 0. \quad (4.4.9)$$

Proviamo che (4.4.9) vale per le funzioni costanti a tratti della forma $h = \sum_{0 \leq i \leq N} \lambda_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}$. Infatti, per n sufficientemente grande si ha che $\frac{1}{n} < a_1$ e quindi

$$\int_0^1 u_n h dx = \lambda_0 \int_0^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{p}} dx = \lambda_0 n^{\frac{1}{p} - 1} \rightarrow 0.$$

Dal momento che le funzioni costanti a tratti costituiscono un sottoinsieme di uno spazio denso di L^p per ogni $p \geq 1$ e quindi si ha che per ogni $v \in L^q$ per ogni $\tau > 0$ esiste una funzione h costante a tratti tale che $\|v - h\|_{L^q} < \tau$. Si ottiene dunque:

$$\int_0^1 u_n v dx = \int_0^1 u_n (v - h) dx + \int_0^1 u_n h dx \leq \|v - h\|_q \|u_n\|_p + \int_0^1 u_n h dx,$$

per $n \rightarrow +\infty$, tenendo conto del fatto che $\|u_n\|_p = 1$, segue la convergenza debole.

Il seguente teorema di Riemann-Lebesgue permette di costruire un gran numero di esempi di funzioni debolmente convergenti ma non convergenti in norma.

TEOREMA 4.20. *— Sia $1 \leq p \leq +\infty$ e $\Omega = [0, 1]^n$ ed $u \in L^p(\Omega)$. Estendiamo u in modo periodico da Ω a tutto $\mathbb{R}^n$. Sia $u_k(x) = u(kx)$ e definiamo*

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

*Si ha che u_k converge debole a $\bar{u}$ per $1 \leq p < +\infty$ e debole * quando $p = \infty$.*

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per $\Omega = (0, 1)$ e per $1 < p < +\infty$. Si può supporre che $\bar{u} = \int_0^1 u(x) dx = 0$. Osserviamo che dal momento che u è periodica di periodo 1:

$$\|u_k\|_p^p = \int_0^1 |u(kx)|^p dx = \frac{1}{k} \int_0^k |u(y)|^p dy = \int_0^1 |u(x)|^p dx, \quad (4.4.10)$$

e quindi $\|u_k\|_p = \|u\|_p$. L'uguaglianza delle norme segue facilmente anche per $p = +\infty$.

Bisogna quindi provare che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_k(x) v(x) dx = 0, \quad v \in L^q. \quad (4.4.11)$$

Proviamo dapprima che la precedente relazione vale per h funzione costante a tratti $h = \sum_{i=1}^N \lambda_i \chi_{[a_i, a_i+1]}$, e cioè

$$\int_0^1 u_k(x) h(x) dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} u_k(x) dx \rightarrow 0$$

da altra parte

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} u_k(x) dx = \frac{1}{k} \int_{ka_{i-1}}^{ka_i} u(y) dy = \frac{1}{k} (I_1 + I_2 + I_3).$$

dove

$$I_1 + I_3 = \int_{ka_{i-1}}^{[ka_{i-1}]+1} u(y) dy + \int_{[ka_i]}^{ka_i} u(y) dy,$$

e quindi per la periodicità di u

$$\frac{1}{k} |I_1 + I_3| \leq \frac{2}{k} \int_0^1 u(y) dy,$$

invece, tenendo conto del fatto che $[ka_i] - [ka_{i-1}] + 1 \in N$, si ha

$$|I_2| = \left| \int_{[ka_{i-1}]+1}^{[ka_i]} u(y) dy \right| \leq \left| \frac{[ka_i] - [ka_{i-1}] - 1}{k} \int_0^1 u(y) dy \right| = 0,$$

quindi poiché u è a media nulla, segue

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^1 u_k(x) h(x) dx = 0.$$

Sia $v \in L^q$ e $\epsilon > 0$, per la densità esiste una funzione h costante a tratti tale che $\|v - h\|_q < \epsilon$, e quindi

$$\left| \int_0^1 v(x) u_k(x) dx \right| \leq \|v - h\|_q \|u_k\|_q + \left| \int_0^1 h(x) u_k(x) dx \right|,$$

da cui segue (4.4.11), poiché $\|u_k\|_p = \|u\|_p$.

Esempio 4.3 Sia $\Omega = (0, 2\pi)$ e $u_k(x) = \sin(kx)$, dal teorema di Riemann-Lebesgue segue che u_k converge debolmente a 0 in L^p e debole $*$ in L^∞ , ma non converge in norma in nessun spazio L^p .

Esempio 4.4 Sia $\Omega = (0, 1)$ e α, β numeri reali, sia

$$u(x) = \begin{cases} \alpha & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \beta & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

estendiamo u per periodicità in tutto $\mathbb{R}$ e definiamo $u_k(x) = u(kx)$ e quindi ciascuna u_k non prende che i valori α, β su insiemi che hanno misura $\frac{1}{2}$. Dal Teorema di Riemann-Lebesgue si ha che u_k converge debolmente in ogni spazio L^p , $1 \leq p < +\infty$ e debole $*$ in L^∞ verso la funzione media di $u(x)$ che indicheremo con $\bar{u}(x)$.

$$\bar{u}(x) = \int_0^1 u(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \alpha + \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Verifichiamo adesso che la successione non converge in norma L^p per alcun p ; consideriamo prima il caso $p > 1$, ragionando come in 4.4.10

$$\|u_k\|_p^p = \int_0^{\frac{1}{2}} \alpha^p + \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta^p = \frac{\alpha^p + \beta^p}{2},$$

mentre

$$\|\bar{u}\|_p^p = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^p,$$

quindi $\|u_k\|$ è diversa da $\|\bar{u}\|$ quando $p \neq 1$. Sia ora $p = 1$:

$$\begin{aligned} \left\|u_k - \frac{\alpha + \beta}{2}\right\|_1 &= \int_0^1 \left|u_k(x) - \frac{\alpha + \beta}{2}\right| dx \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\int_{\frac{2m}{2k}}^{\frac{2m+1}{2k}} \left|\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2}\right| dx + \int_{\frac{2m+1}{2k}}^{\frac{2m+2}{2k}} \left|\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right| dx \right) \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{|\alpha - \beta|}{2k} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \end{aligned}$$

e quindi non converge a zero.

4.5 Funzioni test e mollificatori

La definizione di supporto di una funzione, data precedentemente, non è esatta quando si ha che fare con classi di equivalenza di funzioni quasi ovunque uguali come accade nel caso delle funzioni degli spazi L^p .

Occorre dare una definizione tale che se $f_1 = f_2$ quasi ovunque si deve avere $\text{Supp } f_1 = \text{Supp } f_2$.

DEFINIZIONE 4.5. — *Sia $f : R^n \rightarrow R$, consideriamo la famiglia $(\omega_i)_{i \in I}$ di aperti di R^n tale che per ogni $i \in I$, $f = 0$ quasi ovunque in ω_i . Poniamo $\omega = \cup \omega_i$, allora $f = 0$ quasi ovunque in ω . Definiamo il supporto $\text{Supp } f$ di f il complementare di ω .*

Da momento che se $f_1 = f_2$ quasi ovunque allora $\text{Supp } f_1 = \text{Supp } f_2$, possiamo parlare di supporto di una funzione $f \in L^p$ senza specificare di quale rappresentante scegliamo nella classe.

Nel seguito avremo bisogno della seguente definizione:

DEFINIZIONE 4.6. — *Sia Ω un aperto di R^n e $1 \leq p \leq \infty$. diremo che $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f \in L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$. In questo spazio non si può definire una norma ma si definisce la convergenza delle successioni: diremo che u_n converge a u in L^p_{loc} se u_n converge a u in $L^p(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$.*

Diamo la definizione di prodotto di convoluzione tra due funzioni $f * g$.

TEOREMA 4.21. — *Siano $f \in L^1_{loc}(R^n)$ e $g \in C^0_0(R^n)$ oppure $f \in L^1(R^n)$ e $g \in L^\infty(R^n)$, allora per quasi ogni $x \in R^n$ la funzione $x \rightarrow f(x-y)g(y)$ è integrabile. Il prodotto di convoluzione di f e g è la funzione definita da:*

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int f(x-z)g(z)dz. \quad (4.5.12)$$

Rimandiamo al testo di Brezis la validità della precedente definizione, tuttavia ricordiamo i due teoremi sull'integrazione di Lebesgue che permettono la prova:

• **Teorema di Fubini o dello scambio di integrazione:**

Siano Ω_1, Ω_2 due aperti R^n . se $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ allora

1. per q.o. $x \in \Omega_1$, $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ ed inoltre $\int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1(\Omega_1)$;
2. per q.o. $y \in \Omega_2$, $f(\cdot, y) \in L^1(\Omega_1)$ ed inoltre $\int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1(\Omega_2)$;

Valgono poi le seguenti uguaglianze:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} f(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} f(x, y) dx$$

• **Teorema di Tonelli o di assoluta integrabilità:**

Sia $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow R$ una funzione misurabile, supponiamo che:

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |f(x, y)| dy < \infty$$

allora $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

DEFINIZIONE 4.7. — *Una funzione $\phi \in C_0^\infty(R^n)$ si dice mollificatore o nucleo regolarizzante se soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\phi(x) \geq 0$,
2. $\text{Supp } \phi \subset \bar{B}_1$ dove $B_1 = \{x : |x| < 1\}$,
3. $\int_{R^n} \phi(x) = 1$.

Si verifica facilmente che la funzione $\eta \in C_0^\infty(R^n)$:

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni dei nuclei regolarizzanti moltiplicata per un opportuna costante.

DEFINIZIONE 4.8. — *Assegnata $f \in L_{loc}^1$, si chiama ϵ -regolarizzata di f la funzione*

$$f_\epsilon(x) = \int f(y) \phi_\epsilon(x-y) dy = \int f(x-z) \phi_\epsilon(z) dz, \quad (4.5.13)$$

dove $\phi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^n} \phi\left(\frac{z}{\epsilon}\right)$. Si ha quindi che :

$$f_\epsilon(x) = f * \phi_\epsilon = \phi_\epsilon * f.$$

Dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale è facile vedere che per ogni $\epsilon > 0$, $f_\epsilon \in C^\infty$ e che per ogni multindice α

$$D^\alpha f_\epsilon = f * D^\alpha \phi_\epsilon.$$

Inoltre se f è a supporto compatto $K \subset R^n$ allora

$$\text{Supp } f_\epsilon \subset K_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}.$$

Infatti sia $x \in \text{Supp } f_\epsilon$ allora $y = x - z \in \text{Supp } f$ e $z \in \text{Supp } \phi_\epsilon$, segue quindi che $|x - y| = |z| \leq \epsilon$ quindi $\text{dist}(x, K) \leq |x - y| \leq \epsilon$.

Osserviamo che se f non ha supporto compatto non è detto che f_ϵ siano a supporto compatto contenuto in Ω .

Diamo alcune proprietà delle regolarizzate delle funzioni di classe L^p .

LEMMA 4.1. — **Sia $f \in L^p(R^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Allora vale**

$$\|f_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $1 < p < +\infty$, dalla disuguaglianza di Holder

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x)| &\leq \int |f(y)| \phi_\epsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) \phi_\epsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) dy \\ &\leq \left\{ \int |f(y)|^p \phi_\epsilon(x-y) dy \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int \phi_\epsilon(x-y) dy \right\}^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Poiché $\int \phi_\epsilon(x-y) dy = 1$ si ottiene

$$|f_\epsilon(x)|^p \leq \int |f(y)|^p \phi_\epsilon(x-y) dy,$$

da cui integrando in x segue la tesi.

In modo analogo si procede nei casi $p = 1$ e $p = +\infty$.

TEOREMA 4.22. — **Sia $f : R^n \rightarrow R$, allora**

- **Se f è continua, si ha che f_ϵ converge a f per $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente sui compatti $K \subset R^n$;**
- **Se $f \in L^p(R^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ allora f_ϵ converge a f in $L^p(R^n)$.**

Dimostrazione. Sia f continua e consideriamo

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \int (f(x-z) - f(x)) \phi_\epsilon(z) dz,$$

poiché ϕ_ϵ è nulla per $|z| > \epsilon$, l'integrale è esteso a $B_\epsilon = \{x : |x| \leq \epsilon\}$. Sia K un compatto di R^n , dal teorema di Cantor f è uniformemente continua in K e quindi per ogni $\tau > 0$ esiste σ_τ tale che $|f(x-z) - f(x)| < \tau$ quando $0 < |z| < \sigma_\tau$, allora basta considerare $\epsilon < \sigma_\tau$ e si ottiene

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| < \tau \int \phi_\epsilon(z) dz = \tau,$$

da cui segue la convergenza uniforme.

Supponiamo $f \in L^p$, dalla proprietà di densità, per ogni $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^0$ tale che $\|f - g\| < \tau$. Da altra parte, tenendo conto del fatto che $(f - g)_\epsilon = f_\epsilon - g_\epsilon$, dal teorema precedente segue

$$\|f - f_\epsilon\|_p \leq \|f - g_\epsilon\|_p + \|g - g_\epsilon\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\|f - g\|_p + \|g - g_\epsilon\|_p,$$

dal momento che g ha supporto compatto, g_ϵ ha supporto contenuto in $K_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$ e $K_\epsilon \subset K_1$, per $\epsilon < 1$. Dalla prima parte della dimostrazione g_ϵ converge uniformemente a g in K_1 quindi dal fatto che $\|g - g_\epsilon\|_p \leq |K_1|^{\frac{1}{p}} \text{Sup}_{x \in K_1} |g(x) - g_\epsilon(x)|$, segue la tesi.

TEOREMA 4.23. *—Sia $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset R^n$ allora $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f \in L^p$, dalla densità, per ogni $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^0$ tale che $\|f - g\| < \tau$. Da altra parte per ϵ sufficientemente piccolo risulta $\text{Supp } g_\epsilon \subset \Omega$ e poiché g_ϵ converge a g in L^p si ha $\|g - g_\epsilon\|_p \leq \tau$. La successione $(g_\epsilon) \subset C_0^\infty$ e allora

$$\|g_\epsilon - f\|_p \leq \|g_\epsilon - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\tau,$$

da cui la tesi.

Siamo ora in grado di dare la dimostrazione del **Fondamentale del Calcolo delle Variazioni**, Teorema 4.19.

Dimostrazione. Assegnata $g \in L^\infty$ una funzione con supporto compatto contenuto in Ω proviamo che vale

$$\int_\Omega fg \, dx = 0.$$

Sia $g_\epsilon \in C_0^\infty$ e per ϵ sufficientemente piccolo risulta $\text{Supp } g_\epsilon \subset \Omega$. Dall'ipotesi segue quindi che

$$\int_\Omega g_\epsilon f \, dx = 0$$

Poiché g_ϵ converge a g in L^1 , esiste una sottosuccessione, che indichiamo ancora con g_ϵ , che converge a g quasi ovunque in Ω .

Inoltre, per il Lemma 1 si ha

$$|f(x)g_\epsilon(x)| \leq \|g_\epsilon\|_\infty |f(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty,$$

si può applicare il teorema della convergenza dominata e quindi dal passaggio al limite sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\int_{\Omega} g f \, dx = 0.$$

Assegnato un compatto K , definiamo la seguente funzione in L^∞ :

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} f(x) & x \in K \\ 0 & x \in \Omega - K \end{cases}$$

da quanto provato in precedenza si ha per questa scelta di g :

$$\int_K |f| \, dx = 0,$$

e quindi $f(x) = 0$ quasi ovunque in K . Dall'arbitrarietà di K , segue $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω .

4.6 Integrazione Numerica e convergenza debole

La convergenza debole ha alcune interessanti applicazioni nella teoria dell'integrazione numerica: il problema consiste di stabilire valori approssimati di una assegnato integrale:

$$\int_a^b f(t) \, dt.$$

In generale si scelgono dei punti appartenenti all'intervallo $[a, b]$, detti **nodi**, e quindi si approssima il valore dell'integrale con una combinazione lineare dei valori di f nei nodi.

I nodi ed i coefficienti della combinazione non dipendono dalla funzione integranda f ma dal procedimento utilizzato.

L'analisi funzionale può dare un aiuto in questo problema stabilendo le condizioni della convergenza al crescere del numero dei nodi.

Consideriamo lo spazio di Banach $X = C([a, b])$ con la norma $\|f\|_\infty = \sup |f(t)|$ ed in funzionale lineare in X :

$$F(f) = \int_a^b f(t) \, dt.$$

per ogni intero positivo n scegliamo $n + 1$ numeri reali tali che

$$a \leq t_0^n < t_1^n < \dots t_n^n \leq b \quad \textbf{nodi}$$

e $n + 1$ numeri reali

$$\alpha_0^n, \alpha_1^n, \dots, \alpha_n^n \quad \textbf{coefficienti}$$

e definiamo il funzionale F_n lineare su X

$$F_n(f) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^n f(t_k^n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6.14)$$

dobbiamo provare che per ogni f il valore $F_n(f)$ approssima $F(f)$.

La successione di funzionali $F_n \in X^*$, infatti per ogni $f \in X$:

$$|F_n(f)| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| |f(t_k^n)| \leq \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \|f\|_\infty$$

Proviamo che

$$\|F_n\|_{X^*} = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \quad (4.6.15)$$

Scegliamo $f_0 \in X$ tale che $|f_0(t)| \leq 1$ e

$$f_0(t_k^n) = \text{sign} \alpha_k^n = \begin{cases} 1 & \alpha_k^n \geq 0 \\ -1 & \alpha_k^n < 0 \end{cases}$$

quindi poiché $\|f_0\|_\infty = 1$ e $F_n(f_0) = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n|$ si ha (4.6.15).

DEFINIZIONE 4.9. – *Un processo di integrazione numerica si dice convergente se per ogni $f \in X$ si ha $F_n(f)$ converge a $F(f)$, quindi se F_n converge nella topologia debole ${}^*\sigma(X^*, X)$, a F .*

Dal momento che i polinomi si integrano facilmente, è naturale richiedere che

- Per ogni n se p è un polinomio di grado non superiore a n allora

$$F_n(p) = F(p)$$

Poiché ciascun F_n è lineare è sufficiente richiedere che la relazione $F_n(p) = F(p)$ valga sulle $n + 1$ potenze della forma:

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t, \quad p_2(t) = t^2, \dots, \quad p_n(t) = t^n.$$

Si hanno quindi le $n + 1$ condizioni

$$F_n(p_j) = F(p_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Osserviamo che nella precedente l'uguaglianza sono considerati $2n + 2$ parametri: $n + 1$ nodi e $n + 1$ coefficienti.

Si vede che assegnati i nodi i coefficienti sono determinati in modo unico.

Infatti $p_j(t_k^n) = (t_k^n)^j$ quindi per $j = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^n (t_k^n)^j = \int_a^b t^j = \frac{1}{j+1} (b^{j+1} - a^{j+1}).$$

Si tratta di un sistema non omogeneo di $n + 1$ equazioni lineari nelle $n + 1$ incognite $\alpha_0^n, \dots, \alpha_n^n$ e si ha che esiste una unica soluzione se il corrispondente sistema omogeneo

$$\sum_{k=0}^n (t_k^n)^j \gamma_k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

ha solo la soluzione banale $\gamma_0 = 0, \dots, \gamma_n = 0$ o in modo equivalente se vale lo stesso per il sistema

$$\sum_{j=0}^n (t_k^n)^j \gamma_j = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

di cui la matrice dei coefficienti è la matrice trasposta di quella del sistema precedente. Otteniamo quindi un sistema nelle incognite $(t_k^n)^j$ e con coefficienti γ_j . Segue che il polinomio $\sum_{j=0}^n t^j \gamma_j$, di grado n , deve essere nullo nei $n + 1$ nodi e quindi i suoi coefficienti $\gamma_j = 0$.

Si può concludere che per ogni scelta di nodi vi sono dei coefficienti determinati in modo unico tale che per i polinomi segue che $F_n(p) = F(p)$ e quindi tali che il corrispondente processo di integrazione numerica è convergente per i polinomi. Ci chiediamo quindi sotto quali condizioni aggiuntive il processo risulta convergente per ogni funzione f .

Abbiamo bisogno di due risultati:

TEOREMA 4.24. – Teorema di approssimazione di Weierstrass (1885).
L'insieme dei polinomi con coefficienti reali è denso in $C([a, b])$.

Per ogni $f \in C([a, b])$ e $\epsilon > 0$ esiste un polinomio p tale che $|f(t) - p(t)| < \epsilon$, per ogni $t \in [a, b]$.

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza in $\sigma(X^*, X)$

TEOREMA 4.25. – Una successione di funzionali (F_n) in uno spazio di Banach X converge a $F \in X^*$ nella topologia debole *, $\sigma(X^*, X)$, se e solo se:

- (i) la successione $(\|F_n\|)$ è limitata, $\|F_n\|_{X^*} \leq M$;
- (ii) La successione $F_n(x)$ è di Cauchy per ogni x appartenente ad un sottospazio denso D di X .

Dimostrazione. Se $F_n \rightarrow F$ in $\sigma(X^*, X)$ allora le norme sono equilimitate e (ii) è ovvia.

Supponiamo che valgano (i) e (ii), allora fissato $x \in X$ per ogni $\epsilon > 0$ esiste $y \in D$ tale che

$$\|x - y\| < \frac{\epsilon}{3M}$$

ed inoltre

$$|F_n(y) - F_m(y)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad n, m > n_0$$

segue che

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leq |F_n(x) - F_m(y)| + |F_n(y) - F_m(y)| + |F_m(y) - F_m(x)|$$

altro

$$\leq \|F_n\| \|x - y\| + \frac{\epsilon}{3} + \|F_m\| \|x - y\| < \epsilon$$

allora la successione $F_n(x)$ è di Cauchy in R e quindi converge a $F(x)$, con $F \in X^*$.

Vale quindi **Teorema di convergenza di Pòlya per l'integrazione numerica.**

TEOREMA 4.26. — *Un processo di integrazione numerica converge per ogni funzione reale f definita in $[a, b]$ se e solo se esiste una costante $C > 0$ tale che:*

$$\sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| \leq C, \quad \forall n$$

Dimostrazione. Lo spazio W dei polinomi con coefficienti reali è denso in $C([a, b])$ per il teorema di approssimazione di Weierstrass. Da (4.6.15) si per l'ipotesi segue che $\|F_n\|$ è limitata e quindi dal Teorema 4.25 segue che F_n converge nella topologia $\sigma(X^*, X)$ e in particolare F è il limite debole* della successione F_n .

È evidente che nel teorema precedente possiamo sostituire nel teorema ai polinomi un qualunque sottoinsieme denso di $C([a, b])$.

Osserviamo che nei metodi di integrazione numerica i coefficienti sono generalmente non negativi. consideriamo il polinomio $f = 1$

$$F_n(1) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^n = \sum_{k=0}^n |\alpha_k^n| = F(1) = \int_a^b dt = b - a,$$

quindi $\|F_n\| \leq b - a$, infatti:

$$|F_n(f)| \leq \sum_{k=0}^n \alpha_k^n \|f\| = (b - a) \|f\|$$

Si può concludere che un processo di integrazione numerica con F_n definite in (4.6.14) e tale che $F_n(p) = F(p)$ per ogni polinomio definito in $[a, b]$, con coefficienti non negativi converge per ogni funzione continua.

4.7 Appendice

DEFINIZIONE 4.10. — *Sia (X, τ) uno spazio topologico è compatto se da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un ricoprimento finito.*

Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 4.11. — *Diremo che una famiglia di chiusi (C_i) ha la proprietà dell'intersezione finita se ogni sua sottofamiglia finita ha intersezione non vuota.*

Si vede che la compattezza si può esprimere in termini di famiglie di chiusi:

PROPOSIZIONE 4.1. — *Uno spazio topologico è compatto se e solo se:*

- *ogni famiglia di chiusi ad intersezione vuota, ammette una sottofamiglia finita ancora ad intersezione vuota.*
- *ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione finita non vuota.*

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 4.27. — *Sia X uno spazio compatto e $\varphi : X \rightarrow R$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora φ ha minimo in X .*

Dimostrazione. Per $r \in R$ si definisca

$$A_r = \{x \in X : \varphi(x) > r\}$$

Per costruzione si ha che $A_r \subset A_s$, se $r > s$. Inoltre, poiché φ è semicontinua inferiormente, A_r è un aperto di X . Allora la famiglia (A_r) è un ricoprimento di aperti di X , e quindi per la proprietà di compattezza di X , esistono $r_1, r_2, \dots, r_N$ tali che:

$$X = A_{r_1} \cup A_{r_2} \cup \dots \cup A_{r_N}.$$

Poniamo R il minimo dei $r_1, r_2, \dots, r_N$ vale che $A_{r_j} \subset A_R$ e quindi

$$X = A_R$$

segue che $\varphi(x) > R$ per ogni $x \in X$ e quindi è inferiormente limitata. Sia $m = \inf_X \varphi$, proviamo che esiste $x_0 \in X$ tale che $\varphi(x_0) = m$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo la successione di sottoinsiemi chiusi di X :

$$C_n = \{x \in X : \varphi(x) \leq m + \frac{1}{n}\}$$

Si vede che ogni sottofamiglia finita di (C_n) ha intersezione non vuota e quindi dalla compattezza di X segue che esiste $x_0 \in \bigcap C_n$. Ma allora per ogni n deve essere

$$m \leq \varphi(x_0) \leq m + \frac{1}{n}$$

quindi necessariamente $\varphi(x_0) = m$.

Capitolo 5

Spazi di Hilbert ed Applicazioni

In uno spazio normato è possibile misurare la distanza tra due suoi punti, in alcuni spazi vettoriali è possibile introdurre un prodotto scalare permette di misurare gli angoli tra due elementi e quindi di stabilire alcune proprietà geometriche, come l'ortogonalità tra due vettori e quindi la proiezione ortogonale di un vettore su un insieme, che gioca un ruolo fondamentale. Sebbene l'introduzione di tali spazi ha origine dalla teoria delle equazioni integrali lineari con D. Hilbert, V. Volterra e E. I. Fredholm alla fine dell'Ottocento, la presentazione assiomatica di questi spazi basata sulla nozione di prodotto scalare fu data intorno al 1930, da J. Von Neumann in connessione a questioni di meccanica quantistica.

5.1 Spazi di Hilbert

Sia H uno spazio vettoriale si definisce un prodotto interno o scalare un'applicazione

$$p : (u, v) \rightarrow p(u, v) \in R,$$

che soddisfa le seguenti condizioni

1. $p(u, u) \geq 0$ e $p(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$;
2. $p(u, v) = p(v, u)$;
3. $p(u, \alpha v + \beta w) = \alpha p(u, v) + \beta p(u, w)$.

Si ha inoltre che per ogni u, v, w in H e $\alpha, \beta \in R$

$$p(\alpha v + \beta w, u) = \alpha p(v, u) + \beta p(w, u).$$

Quando in H si definisce un prodotto scalare si dice che H è spazio *Prehilbertiano*.

Per semplicità di notazione, nel seguito denoteremo $p(u, v) = (u, v)$.

In uno spazio in cui è definito un prodotto scalare si dice che u è ortogonale a v se

$$(u, v) = 0.$$

Vale inoltre la *Disuguaglianza di Schwarz*:

Per ogni coppia u e v in H :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.1.1)$$

Sia $v \neq 0$, allora

$$0 \leq (u - \alpha v, u - \alpha v) = (u, u) - 2\alpha(u, v) + \alpha^2(v, v),$$

da cui segue (5.1.1), per $\alpha = \frac{(u, v)}{(v, v)}$.

Si vede che ogni spazio prehilbertiano è anche uno spazio normato rispetto alla norma

$$\|u\| = [(u, u)]^{\frac{1}{2}} \quad (5.1.2)$$

Infatti valgono le proprietà della norma ed in particolare la disuguaglianza triangolare:

$$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Uno spazio prehilbertiano in cui la norma (5.1.2) determina uno spazio metrico completo viene chiamato **Spazio di Hilbert**.

Un sottospazio Y di uno spazio di Hilbert H , potrebbe non essere di Hilbert dal momento che non è detto che Y sia completo. Quindi la chiusura $\bar{Y}$ di Y è sempre uno spazio di Hilbert con la restrizione su $\bar{Y}$ del prodotto scalare di H .

In uno spazio prehilbertiano valgono le seguenti proprietà:

- Il prodotto scalare è continuo rispetto alla norma di H , infatti se $u_k \rightarrow u$ e $v_k \rightarrow v$, allora

$$(u_k, v_k) \rightarrow (u, v).$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} |(u_k, v_k) - (u, v)| &\leq |(u_k, v_k - v) - (u_k - u, v)| \leq \\ &\leq \|u_k\| \|v_k - v\| + \|v\| \|u_k - u\|. \end{aligned}$$

- Una proprietà geometrica di grande importanza è la cosiddetta **identità del parallelogramma**, in quanto generalizza agli spazi di Hilbert la classica relazione della geometria elementare:

In parallelogramma la somma dei quadrati delle diagonali è uguale al doppio della somma dei quadrati di tutti i suoi lati.

Negli spazi di Hilbert vale infatti che per ogni $u, v \in H$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \quad (5.1.3)$$

o in modo equivalente

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2). \quad (5.1.4)$$

Infatti dal fatto che

$$(u \pm v, u \pm v) = (u, u) \pm 2(u, v) + (v, v),$$

segue

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2(u, v) + \|v\|^2,$$

che implica (5.1.3).

- Vale inoltre l'identità di polarizzazione:

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

- Si dimostra che se una norma soddisfa la regola del parallelogramma 5.1.3 dà luogo al seguente prodotto scalare:

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Diamo qualche esempio di spazi di Hilbert.

- R e R^n sono spazi di Hilbert con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

In particolare ogni spazio a dimensione finita prehilbertiano è anche uno spazio di Hilbert

- Lo spazio delle successioni l^2 definito dalle successioni $x = (x_k)$ tali che $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum x_n y_n.$$

l^2 è il prototipo di uno spazio di Hilbert. Questo spazio fu introdotto e studiato da D. Hilbert intorno al 1912 in un articolo sulle equazioni integrali.

- Si verifica facilmente che lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, con il prodotto scalare

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v dx. \quad (5.1.5)$$

- Lo spazio $C^0([a, b])$, dotato del prodotto scalare (5.1.5) è uno spazio prehilbertiano ma la norma relativa a tale prodotto scalare è diversa da quella del massimo.

Proviamo che non esiste in $C^0([a, b])$ un prodotto scalare che determina la norma del massimo, infatti per la norma del massimo non vale la regola del parallelogramma (5.1.4). Consideriamo $f(t) = 1$ e $g(t) = \frac{t-a}{b-a}$, si vede che le norme sono $\|f\| = \|g\| = 1$ e che $\|f + g\| = 2$ e $\|f - g\| = 1$ si ha allora che $2(\|f\| + \|g\|) = 4$ e $\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 5$.

- Lo spazio delle successioni l^p con $p \neq 2$ non dà luogo ad un prodotto scalare, infatti le successioni $x = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ e $y = (1, -1, 0, \dots, 0, \dots)$ non soddisfano la regola del parallelogramma, dal momento che $\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$.

DEFINIZIONE 5.1. — *Un vettore $v \in H$ si dice ortogonale ad un sottoinsieme M e si denota con $v \perp M$ quando $(u, v) = 0$, per ogni $u \in M$.*

Osserviamo inoltre che se M è un sottoinsieme denso in H e $\bar{v} \in H$ è tale che per ogni $u \in M$ si abbia $(u, \bar{v}) = 0$, allora necessariamente $\bar{v} = 0$.

5.2 Teorema della Proiezione

In uno spazio normato X dato $M \subset X$ la distanza di un elemento x_0 da M è data da $\inf \{\|x - x_0\|, \quad x \in M\}$ e abbiamo già notato l'importanza di determinare l'esistenza e l'eventuale unicità di un elemento $y_0 \in M$ per cui

$$\inf \{\|x - x_0\|, \quad u \in M\} = \|y_0 - x_0\|.$$

Anche quando consideriamo spazi a dimensione finita il problema può avere più soluzioni o nessuna.

Il seguente importante teorema della *Proiezione su un convesso chiuso* stabilisce che negli spazi di Hilbert il problema ha sempre un'unica soluzione quando M è un convesso chiuso.

TEOREMA 5.1. — *Sia $K \subset H$ un convesso chiuso non vuoto dello spazio di Hilbert H . Allora per ogni $f \in H$ esiste un unico $\bar{u} \in K$ tale che:*

$$\text{dist}(f, K) = \inf \{\|f - v\|, \quad v \in K\} = \|f - \bar{u}\|.$$

Il vettore $\bar{u}$ è detto Proiezione ortogonale di f su K ed è caratterizzato dalla seguente proprietà

$$\bar{u} \in K, \quad (f - \bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0, \quad \text{per ogni } v \in K \quad (5.2.6)$$

Dimostrazione. Sia $(u_h) \subset K$ una successione minimizzante di $\text{dist}(f, K)$ e quindi $d_h = \|f - u_h\|$ converge a $\text{dist}(f, K)$ per $h \rightarrow +\infty$. Proviamo che u_h è una successione di Cauchy. Dalla regola del parallelogramma per $u = f - u_h$ e $v = f - u_k$ si ha

$$\frac{1}{2}(\|f - u_k\|^2 + \|f - u_h\|^2) = \|f - \frac{u_h + u_k}{2}\|^2 + \|\frac{u_h - u_k}{2}\|^2.$$

Dal momento che K è convesso $\frac{u_h + u_k}{2} \in K$ si ha $\|f - \frac{u_h + u_k}{2}\| \geq \text{dist}(f, K) = d$ e quindi

$$\|\frac{u_h - u_k}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}(d_h^2 + d_k^2) - d^2,$$

che implica $\|\frac{u_h - u_k}{2}\|^2 \leq \epsilon$ per $h, k > h_0$. Poiché H è uno spazio completo si ha che (u_h) converge a $\bar{u} \in K$, visto che K è chiuso.

Per $0 \leq t \leq 1$ e $w \in K$ definiamo $v = (1 - t)\bar{u} + tw \in K$, dalla condizione di minimalità di $\bar{u}$ si ha:

$$\|f - \bar{u}\| \leq \|f - (1 - t)\bar{u} - tw\| = \|f - \bar{u} - t(w - \bar{u})\|,$$

allora

$$\|f - \bar{u}\|^2 \leq \|f - \bar{u}\|^2 - 2t(f - \bar{u}, w - \bar{u}) + t^2\|w - \bar{u}\|^2,$$

segue che per ogni $0 \leq t \leq 1$ si ha

$$2(f - \bar{u}, w - \bar{u}) \leq t\|w - \bar{u}\|^2$$

e quindi $(f - \bar{u}, w - \bar{u}) \leq 0$.

(5.2.6) caratterizza $\bar{u}$, infatti in questo caso per ogni $v \in K$:

$$\|\bar{u} - f\|^2 - \|v - f\|^2 = 2(f - \bar{u}, v - \bar{u}) - \|\bar{u} - v\|^2 \leq 0.$$

Proviamo che $\bar{u}$ è unico. Supponiamo che esistono $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$ che soddisfano (5.2.6) per ogni $v \in K$

$$(f - \bar{u}_1, v - \bar{u}_1) \leq 0,$$

$$(f - \bar{u}_2, v - \bar{u}_2) \leq 0,$$

ponendo nella prima $v = \bar{u}_2$ e nella seconda $v = \bar{u}_1$ si ha

$$(f - \bar{u}_1, \bar{u}_2 - \bar{u}_1) \leq 0 \implies (f, \bar{u}_2 - \bar{u}_1) - (\bar{u}_1, \bar{u}_2 - \bar{u}_1) \leq 0,$$

$$(f - \bar{u}_2, \bar{u}_1 - \bar{u}_2) \leq 0 \implies (f, \bar{u}_1 - \bar{u}_2) + (\bar{u}_2, \bar{u}_2 - \bar{u}_1) \leq 0,$$

sommando le due relazioni si ottiene $\|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\|^2 \leq 0$ e quindi $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$.

In seguito denoteremo con $P_K f$ la proiezione di f su K .

Assegnato un convesso chiuso si definisce l'operatore P_K che ad ogni elemento $f \in H$ associa la sua proiezione su K .

Il seguente corollario stabilisce la continuità dell'operatore P_K .

COROLLARIO 5.1. — *Nelle ipotesi del Teorema precedente, per ogni coppia di elementi di H , f_1, f_2 , vale che*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|.$$

Dimostrazione. Sia $\bar{u}_1 = P_K f_1$ e $\bar{u}_2 = P_K f_2$ si ha

$$(f_1 - \bar{u}_1, v - \bar{u}_1) \leq 0, \quad \text{per ogni } v \in K,$$

$$(f_2 - \bar{u}_2, v - \bar{u}_2) \leq 0, \quad \text{per ogni } v \in K,$$

usando le disuguaglianze per $v = P_K(\bar{u}_2)$ e $u = P_K(\bar{u}_1)$, si ha per addizione

$$\|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|^2 \leq (f_1 - f_2, \bar{u}_1 - \bar{u}_2) \leq \|f_1 - f_2\| \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|.$$

Proviamo che quando $K = M$ è un sottospazio chiuso di H allora la relazione (5.2.6) diventa un'uguaglianza.

TEOREMA 5.2. — *Sia M un sottospazio vettoriale chiuso di H e sia $f \in H$, allora $\bar{u} = P_M f$ è caratterizzato da*

$$u \in M \quad (f - \bar{u}, v) = 0, \quad \text{per ogni } v \in M \quad (5.2.7)$$

quindi il vettore $f - \bar{u}$ è ortogonale a M .

Si ha inoltre che l'operatore che ad ogni $f \in H$ associa la sua proiezione ortogonale su M è lineare.

Dimostrazione. Dai risultati precedenti, poiché M è un sottospazio, segue che

$$(f - \bar{u}, tv - \bar{u}) \leq 0, \quad \text{per ogni } v \in M, \quad t \in R,$$

e quindi

$$(f - \bar{u}, tv) \leq (f - \bar{u}, \bar{u}) \quad \text{per ogni } v \in M \quad t \in R.$$

In particolare dalla (5.2.6) per $v = 2\bar{u}$ segue $(f - \bar{u}, \bar{u}) \leq 0$, e quindi

$$t(f - \bar{u}, v) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in M \quad t \in R,$$

da cui segue 5.2.7.

Siano f_1, f_2 due elementi di H e $\alpha \in R$ allora dal momento che $(f_1 - \bar{u}_1, v) = (f_2 - \bar{u}_2, v) = 0$ per ogni $v \in M$, vale anche $(f_1 + \alpha f_2 - (\bar{u}_1 + \alpha \bar{u}_2), v) = 0$, e quindi $\bar{u}_1 + \alpha \bar{u}_2$ è la proiezione ortogonale dell'elemento $f_1 + \alpha f_2$.

Osserviamo inoltre che in particolare $(f - \bar{u}, \bar{u}) = 0$ e quindi

$$(f, f) = (f - \bar{u}, f - \bar{u}) + 2(f - \bar{u}, \bar{u}) + (\bar{u}, \bar{u}),$$

da cui segue

$$\|f\|^2 = \|f - \bar{u}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 \quad (5.2.8)$$

quindi $\|\bar{u}\| \leq \|f\|$ ed è facile controllare che la norma dell'operatore proiezione ortogonale nello spazio degli operatori lineari e continui è uguale a 1.

DEFINIZIONE 5.2. — *Assegnato M un sottospazio vettoriale di H , si definisce il complemento ortogonale di M , il sottospazio vettoriale definito da*

$$M^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in M\}.$$

Notiamo che

$$M \cap M^\perp = \{0\},$$

dal momento che se $v \in M \cap M^\perp$ si ha $(v, v) = 0$ e quindi $v = 0$.

Ricordiamo che uno spazio X è somma diretta di due sottospazi Y e Z se ogni elemento di $x \in X$ ha un'unica rappresentazione $x = y + z$ con $y \in Y$ e $z \in Z$. Proviamo che se M è un sottospazio chiuso di H :

$$H = M + M^\perp. \quad (5.2.9)$$

Dal teorema 5.2 segue che per ogni $f \in H$ e $\bar{u} \in M$ è la sua proiezione su M si ha

$$(f - \bar{u}, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in M,$$

e quindi $f - \bar{u}$ appartiene a $M^\perp$.

Dal momento che $f = (f - \bar{u}) + \bar{u}$ segue 5.2.9.

Si vede anche che $M^\perp$ coincide con il nucleo dell'operatore P_M .

Infatti se $f \in M^\perp$ si ha $(f, v) = 0$ per ogni $v \in M$ e quindi da (5.2.7), $P_M f$ è il vettore nullo. Se $P_M f = 0$, segue che $(f, v) = 0$ per ogni $v \in M$ e quindi $f \in M^\perp$.

OSSERVAZIONE 5.1. — *Osserviamo che se M è un sottospazio chiuso allora $M = M^{\perp\perp}$. Se $u \in M$ allora u è ortogonale a $M^\perp$ e quindi $M \subset M^{\perp\perp}$. Sia $u \in M^{\perp\perp}$, poiché $H = M + M^\perp$, $u = v + w$ con $v \in M \subset M^{\perp\perp}$ e $w \in M^\perp$. Allora $w = u - v \in M^\perp \cap M^{\perp\perp}$ e quindi $w = 0$.*

Vale anche la seguente proprietà:

TEOREMA 5.3. — *Sia M un sottospazio non vuoto di uno spazio di Hilbert. Allora M è denso in H se e solo se a $M^\perp$ appartiene solo il vettore nullo*

Dimostrazione. Sia M denso in H allora per $u \in M^\perp$ esiste una successione $(u_n) \in M$ che converge a u . Dalla continuità del prodotto scalare si ha che $(u_n, u) = 0$ tende a $(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Viceversa se $M^\perp$ consiste solo del vettore nullo anche $M^\perp$ ha solo il vettore nullo e poiché $H = \bar{M} + M^\perp$ si ha che $\bar{M} = H$.

Il Teorema 5.2 permette di stabilire un importante risultato di rappresentazione dei funzionali lineari in uno spazio di Hilbert.

TEOREMA 5.4. — *Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $f \in H$ tale che*

$$F(v) = (f, v) \quad \text{per ogni } v \in H,$$

ed inoltre

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_H.$$

Dimostrazione. Sia $M = \{u \in H : F(u) = 0\}$ è un sottospazio chiuso di H , visto che F è lineare e continua.

Se $M = H$ allora F è il funzionale nullo e basta scegliere $f = 0$.

Sia $M \neq H$, per $g_0 \in H - M$ consideriamo $g_1 = P_M g_0$ la proiezione di g_0 su M e denotiamo con g il vettore

$$g = \frac{g_0 - g_1}{\|g_0 - g_1\|}. \quad (5.2.10)$$

e dal momento che $F(g_0 - g_1) = F(g_0) \neq 0$, si ha $g \notin M$.

Dal teorema della proiezione

$$(g, w) = \frac{1}{\|g_0 - g_1\|} (g_0 - g_1, w) = 0 \quad \text{per ogni } w \in M.$$

Per ogni $v \in H$ proviamo che esiste λ tale che

$$w = v - \lambda g \in M. \quad (5.2.11)$$

Scegliendo $\lambda = \frac{F(v)}{F(g)}$, si ha

$$F(w) = F(v) - \frac{F(v)}{F(g)} F(g) = 0.$$

Dal momento che ogni $v \in H$ ammette una decomposizione della forma $v = \lambda g + w$, $\lambda \in R$ e $w \in M$ si ottiene

$$(g, v) = \lambda(g, g) + (w, g) = \lambda(g, g),$$

da cui, poiché $(g, g) = 1$, si ha $(g, v) = \frac{F(v)}{F(g)}$ e quindi $f = F(g)g$.

Si vede che il vettore f è univocamente determinato. Supponiamo esistano f_1 e f_2 , allora $(f_1 - f_2, v) = 0$ per ogni $v \in H$ e quindi in particolare $(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0$.

Si ha inoltre, dal momento che g è un vettore a norma unitaria, $\|f\| = |F(g)| \leq \|F\|_{H^*}$. Da altra parte

$$\|F\|_{H^*} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(f, v)|}{\|v\|} \leq \sup_{v \neq 0} \frac{\|f\| \|v\|}{\|v\|} \leq \|f\|,$$

che completa la dimostrazione.

OSSERVAZIONE 5.2. — *Dalla relazione (5.2.11) segue il seguente fatto geometrico: per ogni $F \in H^*$ il nucleo $N(F) = \{x \in H : F(x) = 0\}$ è un iperpiano chiuso e il suo $N(F)^\perp$ è il sottospazio generato dal vettore*

g definito in (5.2.10) e quindi ha dimensione 1. Infatti, proseguendo come nella dimostrazione del precedente teorema, per ogni $v \in H$ esiste $w \in M$ e λ tale che $v = w + \lambda g$ con $g \in N(F)^\perp$. In particolare se $u \in N(F)^\perp$ segue che $w = u - \lambda g \in N(F)$ e quindi $(u - \lambda g, u - \lambda g) = 0$ che implica $u = \lambda g$.

L'operatore $F \in H^* \rightarrow f \in H$ è un isomorfismo isometrico, che permette di identificare H con il suo duale.

Uno spazio di Hilbert è quindi riflessivo, dal momento che $H = H^* = H^{**}$.

Diamo qualche applicazione del Teorema della Proiezione.

Example 5.5. Consideriamo $H = L^2(\Omega)$ e

$$M = \{v \in L^2(\Omega) : v(x) = \text{costante} \quad \text{q.o. in } \Omega\}.$$

M è un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$ generato dalla funzione $\bar{v}(x) = 1$ q.o. in Ω ed è quindi un sottospazio chiuso di dimensione 1. Sia $f \in L^2(\Omega)$ determiniamo la proiezione ortogonale su M , $P_M f \in M$. La relazione $(f - P_M f, v) = 0$ per ogni $v \in M$ nel nostro caso diventa

$$0 = \int_{\Omega} (f - P_M f) v dx \implies \int_{\Omega} (f - P_M f) dx = 0.$$

ma poiché $P_M f$ è quasi ovunque costante segue che

$$P_M f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx,$$

la proiezione di f su M è la funzione costante uguale alla media di f .

L'insieme $M^\perp$ è costituito dalle funzioni di classe L^2 a media nulla, infatti $g \in M^\perp$ se e solo se per ogni $v \in M$

$$\int_{\Omega} g v dx = 0,$$

ma visto che v è quasi ovunque costante g è a media nulla.

Example 5.6. Sia $A \subset \Omega$ un insieme misurabile con misura non nulla insieme al suo complementare $\Omega - A$ e consideriamo M il sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$ delle funzioni che si annullano q.o. in A . Se $f \in L^2(\Omega)$ e $v \in M$ risulta

$$\|f - v\|^2 = \int_{\Omega - A} |f - v|^2 + \int_A |f - v|^2,$$

per cui segue che si ottiene la minima distanza prendendo l'unica $v_0 \in M$ che verifica $v_0 = f$ in $\Omega - A$ e che risulta la proiezione ortogonale di f su M . Osserviamo che l'ortogonale di M è il sottospazio chiuso delle funzioni di L^2 che si annullano in $\Omega - A$.

Example 5.7. Sia $H = L^2(R)$ e il sottospazio chiuso delle funzioni pari H_p . Il suo ortogonale coincide con il sottospazio chiuso delle funzioni dispari H_d . Sia $f \in L^2(R)$ e si considerino le funzioni definite q.o. da $u(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ e $v(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, con $u \in H_p$ e $v \in H_d$. Si ha che $f = u + v$ e le funzioni u e v coincidono con le proiezioni ortogonali di f su H_p e H_d rispettivamente. In particolare esse sono fra le funzioni pari e dispari rispettivamente quelle più vicine di ogni altra a f nella norma di L^2 .

Example 5.8. Siano H uno spazio di Hilbert e f_0 un suo elemento non nullo. Calcoliamo la proiezione di un generico elemento $f \in H$ sul sottospazio M_0 generato da f_0 , che è chiuso in quanto di dimensione 1. Siccome M_0 è costituito da tutti e soli vettori $v = t f_0$ con $t \in R$ bisogna determinare t dalla relazione $(f - t f_0, f_0) = 0$. Segue quindi che

$$P_{M_0} f = \|f_0\|^{-2} (f, f_0) f_0.$$

OSSERVAZIONE 5.3. *—Sia $f_0 \in H$, il principio di dualità, dato nel Capitolo 2, afferma:*

$$\begin{aligned} \inf\{\|f_0 - v\|, v \in M\} = \\ = \sup\{F(f_0), F \in H^*, F(v) = 0, v \in M, \|F\|_{H^*} \leq 1\} \end{aligned}$$

Si vede facilmente che l'estremo superiore è sempre raggiunto dal funzionale F_0 rappresentato dal vettore $\frac{f_0 - P_M(f_0)}{\|f_0 - P_M(f_0)\|}$.

OSSERVAZIONE 5.4. *—Osserviamo che il Teorema delle proiezioni si può generalizzare al caso di spazi di Banach riflessivi utilizzando il procedimento del teorema 4.7. Sia X uno spazio di Banach riflessivo e L un sottospazio chiuso. Fissato $x_0 \in X - L$ definiamo la funzione in L*

$$\varphi(y) = \|x_0 - y\|$$

Si vede facilmente che φ è una funzione convessa e continua. Sia $a \in L$ tale che $\lambda_0 = \varphi(a) < +\infty$ e consideriamo

$$L_0 = \{x \in Y : \varphi(x) \leq \lambda_0\}$$

Si ha che L_0 è un convesso chiuso di X e quindi φ è inferiormente semicontinua. Inoltre, L_0 è anche limitato, infatti $\varphi(y)$ è coerciva:

$$\|y\| \leq \|x_0 - y\| + \|x_0\| \leq \varphi(y) + \|x_0\|.$$

Segue che L_0 è limitato e quindi debolmente compatto. Dal teorema 4.7 esiste dunque il minimo di $\varphi(y)$ in L_0 e si ha che è il minimo su tutto L , ragionando come nel teorema 4.7.

Studiamo le proprietà della convergenza di successioni nella topologia debole negli spazi di Hilbert.

Valgono le seguenti proprietà:

1. Grazie al teorema di Riez una successione (u_n) di elementi in uno spazio di Hilbert converge debolmente ad u se e solo se $(v, u_n) \rightarrow (v, u)$, per ogni altro $v \in H$.
2. Se (u_n) è tale che per ogni $v \in H$ esiste finito il limite della successione (u_n, v) allora (u_n) converge debolmente ad un vettore u .

Definiamo $F(v) = \lim_n (u_n, v)$. Applicando alla successione di funzionali $F_n(v) = (u_n, v)$, il teorema di Banach-Steinhaus si ha che F è un funzionale limitato e quindi per il teorema di rappresentazione di Riez esiste u tale che $F(v) = (u, v)$.

3. Se (u_n) converge debolmente ad u e v_n converge in norma a v allora $(v_n, u_n) \rightarrow (v, u)$.
4. Si ha che (u_n) converge in norma ad u se e solo se converge ad u nella topologia debole e $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$.

Un'implicazione è ovvia. L'altra implicazione segue facilmente dalla relazione:

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2$$

Diamo ora la dimostrazione negli spazi di Hilbert del Teorema 4.9 di compattezza debole negli spazi di Banach riflessivi.

TEOREMA 5.9. — In uno spazio di Hilbert H una successione limitata in norma ha una sottosuccessione debolmente convergente.

Dimostrazione. Sia $(u_n) \subset H$ con $\|u_n\| \leq M$ per ogni n . Supponiamo dapprima che H sia separabile ed indichiamo con $D = (v_m)$ il sottoinsieme denso e numerabile di H . Consideriamo la successione di numeri reali (v_1, u_n) che è limitata e quindi ha una sottosuccessione convergente (u_{n_1}, v_1) convergente. Da (u_{n_1}, v_2) si può quindi estrarre una sottosuccessione convergente e così di seguito. Dal procedimento diagonale di Cantor, si ottiene una sottosuccessione (u_{n_k}) della originale successione (u_n) tale che (u_{n_k}, v_m) converge a $\alpha_m \in \mathbb{R}$ per $k \rightarrow +\infty$.

Resta definito un funzionale g su l'insieme $D = (v_m)$ definito da $g(v_m) = \alpha_m$. Per il Teorema di Hahn-Banach g può essere esteso in un funzionale lineare e

continuo F definito in tutto H e per il Teorema di rappresentazione di Riesz esiste un unico $\bar{u} \in H$ soddisfacente $F(u) = (\bar{u}, v)$ per ogni $u \in H$.

Sia $u \in H$, dalla densità di D segue che $u = \lim_s v_s$ e si ha :

$$(u_{n_k}, u) = (u_{n_k}, u - v_s) + (u_{n_k}, v_s) \leq \|u_{n_k}\| \|v - v_s\| + (u_{n_k}, v_s)$$

dalla limitatezza delle norme della successione (u_n) segue che

$$(u_{n_k}, u) = \lim_s (u_{n_k}, v_s),$$

da altra parte poichè $\alpha_s = F(v_s) = (\bar{u}, v_s)$, si ha

$$\lim_k (u_{n_k}, u) = (\bar{u}, u), \forall u \in H$$

che implica la convergenza debole di (u_{n_k}) a $\bar{u}$.

Per estendere il risultato ad un qualsiasi spazio di Hilbert, consideriamo H_0 la chiusura dell'involuppo lineare della successione (u_n) . Dal ragionamento precedente esiste una sottosuccessione $u_{n_k} \subset H_0$ and un elemento $u \in H_0$ tale che $(u_{n_k}, v) \rightarrow (u, v)$ per ogni $v_0 \in H_0$.

Dalla 5.2.9 segue che per ogni $v \in H$ si ha $v = v_0 + v_1$ con $v_0 \in H_0$ e $v_1 \in H_0^\perp$. Quindi $(u_{n_k}, v) = (u_{n_k}, v_0) + (u_{n_k}, v_1)$ ma dal momento che $(u_{n_k}, v_1) = 0$ si ha $(u_{n_k}, v) = (u_{n_k}, v_0) = (u, v)$ per ogni $v \in H$ e quindi la successione (u_n) converge debole a u .

OSSERVAZIONE 5.5. — *Sia $T : H_1 \rightarrow H_2$ un operatore limitato tra i due spazi di Hilbert H_1 e H_2 : Si definisce l'operatore aggiunto di T l'operatore $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ definito da:*

$$(T(u), v) = (u, T^*(v)), \quad u \in H_1 \quad v \in H_2$$

L'operatore T^ è un operatore limitato e $\|T\| = \|T^*\|$.*

5.3 Forme Bilineari e Teorema di Stampacchia

DEFINIZIONE 5.3. — *Sia X uno spazio normato, un'applicazione $a : (u, v) \in X \times X \rightarrow R$ si dice una forma bilineare quando: per ogni $u, v, w \in X$ e $\alpha, \beta \in R$, si ha*

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w),$$

$$a(w, \alpha u + \beta v) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v).$$

Una forma bilineare a si dice limitata se esiste una costante C tale che:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|.$$

Una forma bilineare a si dice simmetrica se per ogni $u, v \in X$:

$$a(u, v) = a(v, u).$$

Una forma bilineare a è positiva se per ogni $u \in X$

$$0 \leq a(u, u)$$

ed infine si dice coerciva (o anche strettamente positiva) se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che:

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u).$$

L'applicazione che definisce il prodotto scalare è una forma bilineare simmetrica, definita positiva e limitata rispetto alla norma determinata dal prodotto scalare stesso.

PROPOSIZIONE 5.1. – Una forma bilineare $a(u, v)$ limitata è anche continua in X ed inoltre se $(u_h), (v_h)$ convergono a u, v rispettivamente allora $a(u_h, v_h) \rightarrow a(u, v)$.

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\begin{aligned} |a(u_h, v_h) - a(u, v)| &= |a(u_h - u, v_h) + a(u, v_h - v)| \leq \\ &\leq C \|u_h - u\| \|v_h\| + C \|u\| \|v_h - v\|, \end{aligned}$$

e quindi segue la tesi osservando che le norme di $\|v_h\|$ sono equi limitate.

Si definisce lo spazio delle forme bilineari e limitate di $X \times X$ in R che è uno spazio normato dotato della norma

$$\|a\| = \sup_{u, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\| \|v\|}$$

Vale un teorema di rappresentazione per le forme bilineari che permette di costruire un operatore isometrico tra lo spazio delle forme bilineari e continue su uno spazio di Hilbert H e lo spazio degli operatori di H in H .

TEOREMA 5.10. — *Sia a una forma bilineare limitata di uno spazio di Hilbert H in se stesso allora esiste un operatore lineare e limitato di H in H , univocamente determinato, tale che:*

$$a(u, v) = (Au, v)$$

Inoltre $\|a\| = \|A\|$.

Viceversa assegnato un operatore lineare e continuo $A : H \rightarrow H$, la relazione

$$a(u, v) = (Au, v).$$

definisce una forma bilineare a .

Dimostrazione. Fissato $u \in H$, l'applicazione $v \in H \rightarrow a(u, v) \in R$ è un funzionale lineare e continuo in H , quindi per il teorema di rappresentazione 5.4 esiste un unico vettore $Au \in H$ tale che

$$a(u, v) = (Au, v).$$

Si prova facilmente che l'operatore $A : H \rightarrow H$ è lineare e limitato. Infatti

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\|.$$

Inoltre vale

$$\|a\| = \sup_{u \neq 0, v \neq 0} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|\|v\|} \geq \sup_{u \neq 0, Au \neq 0} \frac{|a(u, Au)|}{\|u\|\|Au\|} = \sup_{u \neq 0} \frac{(Au, Au)}{\|u\|\|Au\|}$$

e quindi $\|a\| \geq \|A\|$. Inoltre

$$\|a\| = \sup_{u \neq 0, v \neq 0} \frac{|(Au, v)|}{\|u\|\|v\|} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \|A\|.$$

Nel seguito utilizzeremo il seguente teorema delle contrazioni in uno spazio metrico:

TEOREMA 5.11. — *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e M un sottoinsieme chiuso e non vuoto di X . Se $S : M \rightarrow M$ è una contrazione, cioè esiste $0 < \tau < 1$ tale che*

$$d(S(x), S(y)) \leq \tau d(x, y),$$

allora S ammette un unico punto fisso $S(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dimostrazione. La prova segue in più passi:

1. L'operatore S ha un punto fisso $\bar{x}$. Partendo da $x_0 \in M$ costruiamo la seguente successione di elementi di M :

$$x_{n+1} = S(x_n)$$

Proviamo che (x_n) è una successione di Cauchy.

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Sx_n, S(x_{n-1})) \leq \tau d(x_n, x_{n-1}) \leq \tau^n d(x_1, x_0)$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{i=n}^{n+m-1} \tau^i d(x_1, x_0) \leq \frac{\tau^n}{1-\tau} d(x_1, x_0) \quad (5.3.12)$$

quindi la successione è di Cauchy. Dal momento che X è uno spazio di Banach e M è chiuso, (x_n) converge ad un elemento $\bar{x} \in M$.

Inoltre $d(S(x_n), S(\bar{x})) \leq \tau d(x_n, \bar{x})$ quindi Sx_n converge a $S\bar{x}$ e dalla costruzione della successione x_n segue $S(\bar{x}) = \bar{x}$.

2. Proviamo che $\bar{x}$ è unico. Se esiste anche $\bar{y}$ tale che $S\bar{y} = \bar{y}$, si ha $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(S(\bar{x}), S(\bar{y})) \leq \tau d(\bar{x}, \bar{y})$, che implica $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.
3. La (5.3.12) per $m \rightarrow +\infty$ da una stima dell'errore

$$d(x_n, \bar{x}) \leq \tau^n (1 - \tau)^{-1} d(x_0, x_1).$$

Il prossimo teorema generalizza il teorema della proiezione 5.1 alle forme bilineari stabilendo un' importante risultato che è alla base delle teoria variazionale.

TEOREMA 5.12. – *Sia a una forma bilineare continua e coerciva, $F \in H^*$ e K un convesso, chiuso e non vuoto. Allora esiste un unico $\bar{u} \in K$ tale che*

$$F(v - \bar{u}) \leq a(\bar{u}, v - \bar{u}) \quad \text{per ogni } v \in K. \quad (5.3.13)$$

OSSERVAZIONE 5.6. – *Il teorema 5.1 può essere considerato un caso particolare del teorema 5.12 quando la forma bilineare a è il prodotto scalare in H ed $f \in H$ determina un elemento di H^* , infatti la relazione*

$$(f - \bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K, \quad (5.3.14)$$

è equivalente a

$$(f, v - \bar{u}) \leq (\bar{u}, v - \bar{u}) \quad \text{per ogni } v \in K. \quad (5.3.15)$$

Dimostrazione. Per $F \in H^*$ esiste $f \in H$ tale che $F(v) = (f, v)$ per ogni $v \in H$. Per ogni $u \in H$ consideriamo l'operatore A definito nel teorema 5.10 in H tale che $a(u, v) = (Au, v)$, per ogni $v \in H$.

Quindi, assegnata $F \in H^*$ determinare $\bar{u} \in K$ per cui vale (5.3.13) è equivalente a determinare $\bar{u} \in K$, tale che

$$(f, v - \bar{u}) \leq (A\bar{u}, v - \bar{u}) \quad \text{per ogni } v \in K. \quad (5.3.16)$$

Osserviamo che la (5.3.16) equivale a

$$(f - A\bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0,$$

e quindi a

$$(\varrho f - \varrho A\bar{u} + \bar{u} - \bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0, \quad (5.3.17)$$

per $\varrho > 0$ una costante positiva che determineremo in seguito.

Se $\bar{u} \in K$ è tale che

$$\bar{u} = P_K(\varrho f - \varrho A\bar{u} + \bar{u}), \quad (5.3.18)$$

(5.3.17) segue direttamente dal teorema della proiezione 5.1.

La validità della relazione (5.3.18) è assicurata se si stabilisce che $\bar{u}$ è un punto fisso per l'operatore definito in $K \subset H$ da

$$S : v \in K \rightarrow P_K(\varrho f - \varrho Av + v) \in K.$$

Proviamo che con un'opportuna scelta di ϱ , l'operatore S è una contrazione. Ricordiamo che dal corollario 1 si ha

$$\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|,$$

e quindi nel nostro caso otteniamo

$$\|Sv_1 - Sv_2\|^2 \leq \|\varrho f - \varrho Av_1 + v_1 - \varrho f - \varrho Av_2 + v_2\|^2 = \|v_1 - v_2 - \varrho(Av_1 - Av_2)\|^2.$$

Dalla proprietà di coercività della forma a e quindi dell'operatore A segue

$$\begin{aligned} \|Su_1 - Su_2\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\varrho(Av_1 - Av_2, v_1 - v_2) + \varrho^2\|Av_1 - Av_2\|^2 \\ &\leq (1 - 2\varrho\alpha + C\varrho^2)\|v_1 - v_2\|^2, \end{aligned}$$

quindi scegliendo ϱ tale che $\tau = 1 + C\varrho^2 - 2\varrho\alpha < 1$ cioè $0 < \varrho < \frac{2\alpha}{C}$, si ha che S è una contrazione e quindi ammette un unico punto fisso che denotiamo con $\bar{u}$, che soddisfa

$$(\varrho f - \varrho A\bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0 \implies (f - A\bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0.$$

Nel caso che la forma bilineare a sia simmetrica si ottiene il seguente teorema:

TEOREMA 5.13. — *Sia a una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica, $F \in H^*$ e K un convesso, chiuso e non vuoto. Data $F \in H^*$ esiste un unico $\bar{u} \in H$ tale che:*

$$F(v - \bar{u}) \leq a(\bar{u}, v - \bar{u}) \quad \text{per ogni } v \in K, \quad (5.3.19)$$

e che soddisfa anche il seguente problema di minimo, chiamato Principio di Dirichlet astratto:

$$\begin{cases} \bar{u} \in K \\ \frac{1}{2}a(\bar{u}, \bar{u}) - F(\bar{u}) = \text{Min}_{v \in K} \frac{1}{2}(a(v, v) - F(v)). \end{cases} \quad (5.3.20)$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che a è una forma bilineare simmetrica definisce in H un nuovo prodotto scalare ed naturalmente una nuova norma $(a(u, u))^{\frac{1}{2}}$, che tuttavia risulta equivalente a quella originale in H dal momento che a è anche continua e coerciva, infatti vale

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq C \|u\|^2.$$

Dal teorema precedente segue che per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $g \in H$ tale che $F(v) = a(g, v)$ per ogni $v \in H$.

Quindi, nel caso di forma simmetriche (5.3.13) diventa

$$a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq F(v - \bar{u}) = a(g, v - \bar{u}),$$

e anche

$$a(g - \bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K.$$

Indicata con $\bar{P}_K$ la proiezione su K rispetto al prodotto scalare determinato dalla forma bilineare a , la precedente relazione implica che $\bar{u} = \bar{P}_K g$.

Dal teorema della proiezione vale anche che

$$\text{dist}(g, K) = \inf_{v \in K} \|g - v\| = \|g - \bar{u}\| = (a(g - \bar{u}, g - \bar{u}))^{\frac{1}{2}},$$

e quindi si conclude che $\bar{u}$ realizza il minimo di $a(g - v, g - v)$ al variare di $v \in K$.

Da altra parte per $v \in K$, $a(g - v, g - v) = a(g, g) - 2a(g, v) + a(v, v)$ e quindi in particolare $\bar{u}$ realizza il minimo in K del funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2}(a(v, v) - a(g, v)) = \frac{1}{2}(a(v, v) - F(v)).$$

OSSERVAZIONE 5.7. – *Nel caso particolare che a sia proprio il prodotto scalare in H si ha che $\bar{u}$ è il minimo del funzionale*

$$I(v) = \frac{1}{2}(\|v\|^2 - F(v)).$$

Il principio di Dirichlet astratto è un principio di ortogonalità e ha giocato un ruolo fondamentale nella Teoria delle Equazioni differenziali e nel Calcolo delle Variazioni.

Vale inoltre il seguente Teorema noto come Teorema di Lax-Milgram

TEOREMA 5.14. – *Sia a una forma bilineare, continua e coerciva. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $\bar{u} \in H$ tale che*

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{per ogni } v \in H.$$

Se a è simmetrica allora $\bar{u}$ è caratterizzato dalla proprietà di minimo (5.3.20).

Dimostrazione. Dal Teorema 5.12, con $K = H$, si ha che esiste un unico $\bar{u} \in H$ tale che per ogni $v \in H$

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, v - \bar{u}) &\geq F(v - \bar{u}) \implies (A\bar{u}, v - \bar{u}) \geq (f, v - \bar{u}) \\ &\implies (f - A\bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0. \end{aligned}$$

Per $v \in H$ consideriamo tv con $t \in \mathbb{R}$

$$(f - A\bar{u}, tv - \bar{u}) \leq 0 \implies t(f - A\bar{u}, v) \leq (f - A\bar{u}, \bar{u}) \leq 0.$$

dal momento che $2\bar{u} \in H$. Segue allora che per ogni $v \in H$, $(f - A\bar{u}, v) = 0$ e anche $F(v) = a(\bar{u}, v)$ (e anche $f = A\bar{u}$).

OSSERVAZIONE 5.8. – *Diamo un'idea di come il corollario precedente si applica alle Equazioni Differenziali Lineari. Supponiamo di avere un'equazione che si possa esprimere come $Au = f$ con A un operatore lineare e continuo, definito in uno spazio di Hilbert. Dall'osservazione 5.10 esiste una forma bilineare, tale che $a(u, v) = (Au, v)$ ed inoltre il vettore f determina in modo unico un funzionale lineare e continuo su H .*

Si chiama formulazione variazionale dell'equazione $Au = f$ il seguente problema

Determinare $u \in H$ tale che

$$(Au, v) = a(u, v) = F(v) \quad \text{per ogni } v \in H. \quad (5.3.21)$$

Il vettore $\bar{u}$, che soddisfa (5.3.21), viene chiamato soluzione variazionale dell'equazione.

Quando la forma bilineare $a(u, v)$ è continua e coerciva, dal Corollario 5.14 esiste un'unica $\bar{u} \in H$:

$$(A(\bar{u}), v) = (f, v) \quad \text{per ogni } v \in H \implies (A(\bar{u}) - f, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in H$$

quindi $A(\bar{u}) = f$ e si ottiene una soluzione dell'equazione.

Quando la forma bilineare a è anche simmetrica allora vale anche il Principio di Dirichlet e la soluzione $\bar{u}$ ha la proprietà di minimo stabilita in (5.3.20).

5.4 Sistemi ortonormali

DEFINIZIONE 5.4. *–Diremo che $M \subset H$, dove in H è definito un prodotto scalare è un insieme ortonormale se per ogni coppia di elementi di M si ha $(u, v) = 1$ se $u = v$ altrimenti $(u, v) = 0$.*

DEFINIZIONE 5.5. *–Data una famiglia di elementi (u_i) con $i \in I$, un insieme di indici non necessariamente numerabile, si dice che la famiglia è ortonormale se*

$$(u_i, u_j) = 0 \quad \text{se } i \neq j, \quad (u_i, u_j) = 1 \quad \text{se } i = j.$$

in altro modo si può dire che $(u_i, u_j) = \delta_{i,j}$ dove $\delta_{i,j}$ è la delta di Kronecker.

Quando la famiglia è numerabile si parla di successione ortonormale.

Ogni sottoinsieme finito di elementi di un insieme ortonormale M è linearmente indipendente. Infatti siano $e_1, \dots, e_n$, n elementi di M . Supponiamo che $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, moltiplicando per e_j si ha $\sum \alpha_k (e_k, e_j) = \alpha_j = 0$.

Example 5.15. In R^n i vettori della base canonica costituiscono un sistema ortonormale.

Example 5.16. In l^2 la successione $e_n = \delta_{i,n}$, che ha l' n -simo uguale a 1 e tutti gli altri nulli, è ortonormale.

Example 5.17. Consideriamo lo spazio delle funzioni continue nell'intervallo $[0, 2\pi]$, con il prodotto scalare dato dall'integrale:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Una successione di funzioni ortogonali è data

$$u_n(t) = \cos nt \quad \text{e anche} \quad v_n(t) = \sin nt.$$

Si ottiene una successione di elementi ortonormali definendo:

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},$$

$$\bar{e}_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}.$$

Procedimento di Gram-Schmidt

Proviamo che data una successione di elementi linearmente indipendenti $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ si riesce a costruire una successione ortonormale.

Definiamo

$$e_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1.$$

Sia poi $v_2 = x_2 - (x_2, e_1)e_1$, $v_2 \neq 0$ e v_2 è ortogonale a e_1 e

$$e_2 = \frac{1}{\|v_2\|} v_2.$$

Si considera quindi il vettore non nullo $v_3 = x_3 - (x_3, e_1)e_1 - (x_3, e_2)e_2$, che risulta ortogonale sia a e_1 che a e_2 e definiamo:

$$e_3 = \frac{1}{\|v_3\|} v_3.$$

Si considera all' n -simo passo il vettore non nullo

$$v_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, e_k) e_k$$

e si definisce

$$e_n = \frac{1}{\|v_n\|} v_n.$$

Si vede facilmente che:

$$\text{Span}(e_1, \dots, e_n) = \text{Span}(x_1, \dots, x_n), \text{ per ogni } n$$

Proiezione su un sottospazio a dimensione finita

Dato un sottospazio Y di dimensione finita e quindi chiuso di uno spazio di Hilbert H e sia $(e_1, \dots, e_n)$ una sua base ortonormale, che si può sempre costruire con il procedimento di Gram-Schmidt.

Proviamo che la proiezione del generico $u \in H$ su Y è data da

$$P_Y(u) = \sum_{i=1}^n (u, e_i) e_i.$$

Infatti, si ha che

$$(u - P_Y(u), e_j) = (u, e_j) - \sum_{i=1}^n (u, e_i) (e_i, e_j) = 0.$$

Inoltre

$$\|P_Y(u)\|^2 = \sum_{i=1}^n |(u, e_i)|^2.$$

Sia H uno spazio di Hilbert e (e_n) una sua successione ortonormale. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ definiamo $Y = \text{Span}(e_1, \dots, e_k)$, per quanto detto la proiezione di $u \in H$ su $Y = \text{Span} Y$ è data da

$$P_Y(u) = \sum_{i=1}^k (u, e_i) e_i,$$

ed inoltre dall'uguaglianza (5.2.8) segue

$$0 \leq \|u - P_Y(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|P_Y(u)\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{i=1}^k |(u, e_i)|^2.$$

Si ottiene quindi la seguente **Disuguaglianza di Bessel**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2 \leq \|u\|^2 \quad (5.4.22)$$

Le quantità (u, e_i) vengono chiamati **coefficienti di Fourier** del vettore u .

Data una successione ortonormale (e_n) consideriamo la serie di elementi di H definita da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

dove $\alpha_n \in \mathbb{R}$ sono assegnati.

Vale il seguente teorema di convergenza:

TEOREMA 5.18. — *Sia (e_n) una successione ortonormale in uno spazio di Hilbert H .*

- (i) *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge nella norma di H se e solo se la serie di numeri reali $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$.*
- (ii) *Se $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge in H ad un elemento u allora α_n sono i coefficienti di Fourier di u :*

$$\alpha_n = (u, e_n)$$

e quindi si ha:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n$$

- (iii) *Per ogni $u \in H$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n, \quad \text{converge in norma.}$$

Dimostrazione. (i). Sia $s_n = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in H$ e $\sigma_n = |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 \in R_+$.

Dalla proprietà di ortonormalità segue, per $n > m$:

$$\|s_n - s_m\|^2 = |\alpha_{m+1}|^2 + \dots + |\alpha_n|^2 = \sigma_n - \sigma_m$$

Quindi s_n è di Cauchy in H se e solo se σ_n è di Cauchy in R .

(ii). Supponiamo che la serie converga a u allora per la continuità del prodotto scalare $(s_n, e_j) = \alpha_j$ converge a (u, e_j) .

(iii). Dalla disuguaglianza di Bessel (5.4.22), segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2$ converge e quindi (i) implica (iii).

Consideriamo ora il caso di famiglie di vettori ortonormali non necessariamente numerabili.

Sia $(e_i)_{i \in I}$ una famiglia di vettori di H non numerabile, possiamo anche in questo caso i coefficienti di Fourier di un elemento $u \in H$ sono dati dai prodotti scalari (u, e_i) .

La somma (non numerabile) della serie dei coefficienti di Fourier è definita da:

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 = \text{Sup} \left\{ \sum_{j \in J} |(u, e_j)|^2, \quad J \subset I, J \text{ finito} \right\}.$$

Si vede che anche in questo caso vale la disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Infatti, si ha che per ogni $u \in H$ i coefficienti di Fourier, diversi da zero sono al più un'infinità numerabile.

Per $m \in \mathbb{N}$ denotiamo con k_m il numero dei coefficienti di Fourier tali che

$$|(u, e_i)|^2 > \frac{1}{m}.$$

Si ha che k_m deve essere finito, infatti

$$\|u\|^2 > \sum_{i=1}^{k_m} |(u, e_i)|^2 \geq \frac{1}{m} k_m \implies k_m < m \|u\|^2.$$

Per $u \in H$ definiamo la serie di vettori di H definita da

$$\sum_{i \in I} (u, e_i) e_i, \quad (u, e_i) \neq 0.$$

Si dimostra che la somma della serie non dipende dalla scelta dell'ordine con cui gli elementi sono considerati e quindi valgono gli stessi risultati di convergenza del Teorema 5.18.

Vale inoltre il seguente teorema per le famiglie di vettori ortonormali:

TEOREMA 5.19. — *Sia H uno spazio di Hilbert e $(e_i)_{i \in I}$ una famiglia ortonormale. Le due seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) *Il sottospazio V generato dai vettori $(e_i)_{i \in I}$, definito da:*

$$w \in V \iff w = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

è denso in H .

- (ii) *Per ogni vettore $u \in H$ vale l'identità di Parseval:*

$$\|u\|^2 = \sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 \quad (5.4.23)$$

Dimostrazione. Dimostriamo che (i) implica (ii). Dalla densità di V in H segue che per ogni $u \in H$ e per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$\|u - (\lambda_1 e_{i_1}, \dots, \lambda_n e_{i_n})\|^2 < \epsilon.$$

Denotato con $Y = \text{Span}(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$, dalla proprietà di minimalità della proiezione ortogonale su Y , si ha

$$\|u - P_Y(u)\|^2 \leq \|u - (\lambda_1 e_{i_1}, \dots, \lambda_n e_{i_n})\|^2 < \epsilon,$$

quindi l'uguaglianza (5.2.8)

$$\|u - P_Y(u)\|^2 = \|u\|^2 - \|P_Y(u)\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |(e_{i_k}, u)|^2 < \epsilon$$

implica

$$\|u\|^2 \leq \sum_{i \in I} |(e_i, u)|^2 + \epsilon.$$

Dalla disuguaglianza di Bessel segue 5.4.23.

Proviamo che (ii) implica (i). Dal Teorema 5.3 si ha che lo spazio

$$\bar{V} = H \iff V^\perp = 0$$

Sia $u \in V^\perp$, allora è ortogonale a tutti gli elementi della famiglia quindi $(u, e_i) = 0$ per ogni $i \in I$ e dall'uguaglianza (5.4.23) segue che $u = 0$.

OSSERVAZIONE 5.9. *—Consideriamo lo spazio H delle funzioni continue 2π -periodiche $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty$$

H è uno spazio di Hilbert con l'usuale prodotto scalare. La successione di elementi di H :

$$\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \right)$$

è ortonormale e si prova facilmente che la serie di Fourier per una funzione f è proprio la consueta serie di Fourier. Lo spazio generato da questa famiglia è denso. Infatti, il teorema di Stone-Weierstrass afferma infatti che ogni funzione continua e 2π -periodica si può approssimare uniformemente con polinomi trigonometrici e poiché ogni funzione 2π -periodica si approssima in norma L^2 con funzioni continue, ne segue che si approssima in L^2 con polinomi trigonometrici.

La teoria sviluppata per gli spazi di Hilbert ci permette quindi di affermare che la serie di Fourier di una funzione di L^2 converge in norma.

5.5 Basi Hilbertiane

DEFINIZIONE 5.6. — *Sia (H_n) una successione di sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert H . Si dice che H è somma Hilbertiana di (H_n) se*

1. I sottospazi H_n sono a due a due ortogonali:

$$(v, w) = 0 \quad v \in H_n \quad w \in H_m \quad m \neq n$$

2. Lo spazio V generato dagli (H_n) è denso in H : per ogni $u \in H$ e $\epsilon > 0$ esiste

$$w = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \quad u_i \in H_i \quad \text{tale che} \quad \|u - w\| < \epsilon.$$

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 5.20. — *Supponiamo che H sia somma Hilbertiana di (H_n) . Per $u \in H$ denotiamo con $P_{H_n}(u)$ la proiezione di u su H_n . Allora si ha*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} P_{H_n}(u),$$

ed inoltre

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_{H_n}(u)\|^2.$$

Reciprocamente, data una successione $(u_n) \subset H$, tale che $u_n \in H_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|^2 < \infty$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ è convergente ed il limite u soddisfa $P_{H_n}(u) = u_n$.

Dimostrazione. Sia $u \in H$ e $P_{H_n}(u)$ la proiezione di u su H_n . Consideriamo l'operatore lineare e continuo definito in H da

$$S_k = \sum_{i=1}^k P_{H_i}. \quad (5.5.24)$$

Proviamo che $\lim_k S_k(u) = u$.

Osserviamo che poiché i sottospazi H_n sono a due a due ortonormali, vale

$$(S_k(u), S_k(u)) = \|S_k(u)\|^2 = \sum_{i=1}^k \|P_{H_i}(u)\|^2. \quad (5.5.25)$$

Dalle proprietà della proiezione

$$(u - P_{H_i}(u), P_{H_i}(u)) = 0 \implies (u, P_{H_i}(u)) = \|P_{H_i}(u)\|^2. \quad (5.5.26)$$

Sommando i da 1 a k la precedente uguaglianza si ottiene

$$\sum_{i=1}^k (u, P_{H_i}(u)) = (u, \sum_{i=1}^k P_{H_i}(u)) = \sum_{i=1}^k \|P_{H_i}(u)\|^2 = \|S_k(u)\|^2.$$

quindi

$$\|S_k(u)\|^2 = (u, S_k(u)) \leq \|u\| \|S_k(u)\| \Rightarrow \|S_k(u)\| \leq \|u\|. \quad (5.5.27)$$

Denotiamo con V lo spazio vettoriale generato dagli (H_n) quindi

$$w \in V \implies w = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i, \quad w_i \in H_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Tenendo presente il fatto che i sottospazi H_n sono a due a due ortogonali si ha che

$$(w, v) = (\lambda_i w_i, v), \quad \forall v \in H_i$$

e quindi

$$(w - \lambda_i w_i, v) = 0, \quad \forall v \in H_i$$

da cui segue

$$P_{H_i}(w) = \lambda_i w_i, \quad i=1, \dots, k \quad P_{H_i}(w) = 0, \quad i > k \quad (5.5.28)$$

Sia $u \in H$, dalla proprietà di densità per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{w} \in V$ tale che $\|u - \bar{w}\| < \epsilon$. Per quanto detto, si ha

$$S_k(\bar{w}) = \bar{w}, \quad \text{per } k \text{ abbastanza grande.}$$

Da (5.5.27), per $k > k_0$:

$$\|S_k(u) - u\| \leq \|S_k(u) - S_k(\bar{w})\| + \|u - \bar{w}\| < 2\|u - \bar{w}\| < 2\epsilon$$

e quindi $\lim_k S_k(u) = u$. Inoltre, (5.5.25) implica la convergenza delle norme.

Le relazioni inverse seguono ragionando come nel teorema 5.18.

Diamo ora la definizione di base Hilbertiana:

DEFINIZIONE 5.7. — *Si chiama base hilbertiana una successione di elementi di H tali che:*

- (1) *Sia $\|e_n\| = 1$ per ogni n e $(e_n, e_m) = 0$ per $m \neq n$;*
- (2) *Lo spazio vettoriale generato dalla successione (e_n) è denso in H .*

TEOREMA 5.21. — *Se (e_n) è una base Hilbertiana allora per ogni $u \in H$ si ha*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n) e_n, \quad (5.5.29)$$

ed inoltre vale l'uguaglianza di Parseval:

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2. \quad (5.5.30)$$

Dimostrazione. Le due relazioni seguono dal Teorema 5.20, osservando che denotato con H_n lo spazio generato dal vettore $\{e_n\}$, H è somma Hilbertiana della famiglia H_n ed inoltre $P_{H_n}(u) = (u, e_n)e_n$.

Concludiamo con il seguente risultato:

TEOREMA 5.22. — *Uno spazio di Hilbert è separabile se e solo se ammette una base Hilbertiana numerabile.*

Dimostrazione. Se H possiede una base Hilbertiana numerabile allora lo spazio da essa generato è denso in H . Si prova facilmente che l'insieme delle combinazioni lineari finite a coefficienti razionali degli elementi della base è un insieme numerabile denso in H .

Viceversa sia (u_n) l'insieme numerabile denso in H . Dal procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt si riesce ad ottenere una successione di vettori ortonormali (e_k) che genera un sottospazio di H che contenendo tutti gli elementi u_n è denso in H e che costituisce quindi una base hilbertiana per H .

OSSERVAZIONE 5.10. — *In R^n la base Hilbertiana è la base canonica.*

La successione δ_{ij} con $\delta_{ij} = 0$, $j \neq i$ e $\delta_{jj} = 1$ è una base hilbertiana per lo spazio delle successioni l^2 .

Dai risultati del teorema 5.18, si ha che lo spazio l^2 può essere considerato come lo spazio delle coordinate di un spazio di Hilbert H separabile con base Hilbertiana (e_n) .

Assegnata una successione $(\alpha_n) \in l^2$, identifica un elemento u di H . Infatti la serie di vettori di H definita da $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ converge verso un elemento $u \in H$ e vale

$$(u, e_n) = \alpha_n \quad ||u||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2.$$

5.6 Metodo di Galerkin

Consideriamo il seguente problema in uno spazio di Hilbert H

$$a(u, v) = F(v), \quad v \in H \quad (5.6.31)$$

dove $a(u, v)$ è una forma bilineare continua e coerciva da $H \times H \rightarrow R$. Il metodo di Galerkin consiste di cercare una soluzione u di (5.6.31) attraverso un'opportuna approssimazione.

Consideriamo V_h una famiglia di sottospazi dipendenti da un parametro positivo h tali che:

$$V_h \subset H, \quad \dim(V_h) = N_h < \infty$$

e le soluzioni $u^h \in V_h$ dei problemi approssimanti:

$$a(u^h, v) = F(v), \quad v \in V_h \quad (5.6.32)$$

Siano φ_j^h con $j = 1, \dots, N_h$ una base per V_h e il problema precedente diventa:

$$a(u^h, \varphi_i^h) = F(\varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, N_h \quad (5.6.33)$$

da altra parte poiché $u^h \in V_h$ si ha che $u^h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j^h \varphi_j^h$ quindi si ha

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j^h a(\varphi_i^h, \varphi_j^h) = F(\varphi_i^h), \quad i = 1, \dots, N_h. \quad (5.6.34)$$

Resta definita la matrice $A^h = (a_{ij}) = a(\varphi_i^h, \varphi_j^h)$ (detta matrice di rigidezza) ed il vettore f^h di componenti $f_i^h = F(\varphi_i^h)$ ed il problema approssimato diventa:

$$A^h u^h = f^h.$$

(5.6.34) è equivalente ad un sistema lineare nelle incognite le componenti del vettore u^h .

La matrice A^h ha delle proprietà che sono indipendenti dalla scelta della base per V_h ma dipendono solo dal problema di partenza.

TEOREMA 5.23. — La matrice A^h è definita positiva su V_h .

Dimostrazione. Ricordiamo che una matrice B é definita positiva se $v^T B v \geq 0$ per $v \in R^n$ and $v^T B v = 0$ se e solo se $v = 0$.

Sia $v = (v_i) \in R^{N_h}$ e consideriamo $v = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j^h \in V_h$. si ha

$$\begin{aligned} v^T A v &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} v_i a(\varphi_i^h, \varphi_j^h) v_j = \\ &= \sum_{j=1}^{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} a(v_i \varphi_i^h, v_j \varphi_j^h) = a \left(\sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j^h, \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i^h \right) = a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.6.35)$$

e inoltre $v^T A v = 0$ se e sol se $\|v\| = 0$.

Inoltre si prova facilmente che la matrice A^h é simmetrica se e solo se la forma bilineare $a(u, v)$ é simmetrica.

Diamo ora un analisi del metodo di Galerkin e stabiliamo le sue principali proprietà:

1. esistenza e unicità delle soluzioni approssimanti.
2. stabilità delle soluzioni approssimati.
3. convergenza per $h \rightarrow 0$ delle u^h alla soluzione del problema originale.

Dal teorema di Lax-Milgram il problema (5.6.33) per ogni h ammette una ed una sola soluzione. Da altra parte poiché A^h é invertibile si ha che $A^h v = 0$ ha solo la soluzione nulla e quindi il problema lineare:

$$A^h u^h = f^h \quad (5.6.36)$$

ha un unica soluzione.

Sia u^h la soluzione di $a(u^h, v) = F(v)$ per ogni $v \in V_h$, se si considera $v = u^h$ si ha:

$$\alpha \|u^h\|^2 \leq a(u^h, u^h) = F(u^h) \leq \|F\|_{H^*} \|u^h\|$$

e quindi

$$\|u^h\| \leq \frac{\|F\|}{\alpha}$$

che implica che le norme delle soluzioni approssimate sono equilimitate.

Sia u una soluzione del problema su H , allora $a(u, v) = F(v)$ per ogni $v \in V_h$ e quindi

$$a(u - u^h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h$$

si conclude che u^h é la proiezione ortogonale della soluzione u sul sottospazio V_h .

Sia $v \in V_h$ si ha

$$a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v) + a(u - u^h, v - u^h)$$

dal momento che $v - u^h \in V_h$ si ha che $a(u - u^h, v - u^h) = 0$ e quindi

$$a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v).$$

da altra parte

$$\alpha \|u - u^h\|^2 \leq a(u - u^h, u - u^h) = a(u - u^h, u - v) \leq M \|u - u^h\| \|u - v\|$$

che implica

$$\|u - u^h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v\| \Rightarrow \|u - u^h\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|.$$

Il procedimento converge se

$$\lim_h \inf_{v \in V_h} \|u - v\| = 0, \quad \forall u \in H. \quad (5.6.37)$$

Gli spazi v_h devono quindi essere scelti in modo opportuno da garantire (5.6.37) ed ottenere:

$$\lim_h \|u - u^h\| = 0.$$

Capitolo 6

Spazi di Sobolev in una dimensione

6.1 Introduzione alla formulazione variazionale

Il teorema fondamentale dell'algebra di Gauss ha segnato l'inizio di un nuovo modo di affrontare i problemi matematici. Fino a quel momento infatti, gli studi delle equazioni algebriche cercavano di ottenere formule esplicite delle radici. Gauss invece provò l'esistenza di tali radici, senza preoccuparsi di calcolarne l'espressione. Per la prima volta si stabiliva l'esistenza di soluzioni e solo successivamente si affrontava la questione di determinare i procedimenti e le tecniche per ottenere l'espressione esplicita. Agli inizi dell'Ottocento le due questioni si separano ed è proprio nello studio delle Equazioni Differenziali e del Calcolo delle Variazioni che si ottengono i risultati più interessanti.

La spinta decisiva allo sviluppo di questi due importanti campi dell'Analisi Matematica è iniziata con i grandi progressi dell'Analisi Funzionale, che hanno permesso lo studio dell'esistenza di soluzioni e di minimi attraverso i teoremi astratti dell'analisi funzionale e si è completata, intorno al 1930, con l'introduzione da parte di un matematico russo L. C. Sobolev, di nuovi spazi che portano il suo nome, costituiti da funzioni di classe L^p , che sono dotati di un tipo particolare di derivata, che è ancora una funzione di classe L^p .

Ricordiamo tuttavia che negli stessi anni Colkin e Morrey avevano indipendentemente introdotto spazi di funzioni dello stesso tipo.

Diamo un'idea introduttiva dell'utilizzazione degli spazi di Sobolev nella teoria delle equazioni differenziali.

Consideriamo il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{in } [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

con $f \in C^0([a, b])$. Una soluzione classica (o forte) è una funzione $u \in C^2([a, b])$, che soddisfa l'equazione (6.1.1) in ogni $x \in [a, b]$ e tale che $u(a) = u(b) = 0$.

Il problema in esame può essere risolto mediante opportuni calcoli in modo esplicito, tuttavia procederemo in modo diverso per descrivere su questo esempio elementare il *Metodo Variazionale*.

Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (6.1.1) per una funzione $\varphi \in C^1([a, b])$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ed integriamo sull'intervallo, applicando il procedimento di integrazione per parti

$$\int_a^b u' \varphi' dx + \int_a^b u \varphi dx = \int_a^b f \varphi dx. \quad (6.1.2)$$

Notiamo che (6.1.2) ha senso anche se $u \in C^1([a, b])$, non è più necessario che abbia le derivate seconde.

Vedremo che è sufficiente che u sia dotata di una particolare derivata che chiameremo *debole*.

Le funzioni di classe $u \in L^2$ con derivata debole ancora in $u' \in L^2$ appartengono ad un spazio funzionale che indichiamo con $W^{1,2}([a, b])$ e che chiameremo *Spazio di Sobolev*.

In particolare per le condizioni agli estremi dell'intervallo si considera lo spazio che $W_0^{1,2}([a, b])$, i cui elementi non hanno derivata in senso classico ma sono limiti rispetto ad un opportuna norma di funzioni di classe C^1 .

Una funzione $u \in W_0^{1,2}([a, b])$ che soddisfa (6.1.2) si dice *soluzione debole* dell'equazione (6.1.1).

Lo spazio $W_0^{1,2}([a, b])$ ha anche la proprietà di essere uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v)_{1,2} = \int_a^b u' v' dx + \int_a^b u v dx.$$

Quindi l'espressione a primo membro di (6.1.2) rappresenta il prodotto scalare, in $W_0^{1,2}([a, b])$. Inoltre, se $f \in L^2([a, b])$, il secondo membro di (6.1.2) rappresenta un funzionale lineare e continuo

$$F(\varphi) = \int_a^b f \varphi dx$$

Il funzionale F è lineare e continuo in C_0^1 , che si prolunga su tutto $W_0^{1,2}([a, b])$ per il teorema di Hahn-Banach.

Dal teorema di rappresentazione di Riez dei funzionali negli spazi di Hilbert, esiste un unica $\bar{u} \in W_0^{1,2}([a, b])$ tale che

$$(\bar{u}, \varphi)_{W_0^{1,2}} = F(\bar{u}) \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^1([a, b]).$$

quindi $\bar{u}$ è una soluzione debole dell'equazione (6.1.1).

Dal Principio di Dirichlet segue anche che $\bar{u}$ è minimo del funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2}(v, v) - F(v) = \frac{1}{2} \int_a^b v'^2 dx + \int_a^b u^2 dx - \int_a^b f v dx. \quad (6.1.3)$$

Il programma che segue è quello che descrive a grandi linee il metodo variazionale nella teoria dell'equazioni differenziali.

- Primo passo: Utilizzo del concetto di derivata debole e degli spazi di Sobolev per determinare la formulazione variazionale (o debole) del problema differenziale (6.1.1);
- Secondo passo: Stabilire l'esistenza, ed eventualmente l'unicità di una soluzione debole attraverso i risultati astratti dell'analisi funzionale;
- Terzo passo: Provare un risultato di regolarità : nel caso in esame provare che la soluzione debole è di classe C^2 ;
- Quarto Passo: la soluzione debole è anche una soluzione classica. Infatti, quando in particolare $\bar{u} \in C^2$ è una soluzione debole integrando per parti:

$$\int_a^b (u'' + u + f) \varphi dx = 0.$$

per ogni $\varphi \in C_0^1([a, b])$. Dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 4.19 segue $u'' + u + f = 0$ quasi ovunque e per continuità in tutti i punti di $[a, b]$.

La teoria moderna della risoluzione delle equazioni differenziali è governata dalla tecnica variazionale e dalla nozione di soluzione debole, la cui esistenza è ottenuta utilizzando metodi e risultati dell'analisi funzionale.

6.2 Derivate Deboli

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ di estremi a, b e $C_0^\infty(I)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili con continuità e con supporto contenuto in I .

DEFINIZIONE 6.1. – **Data** $u \in L^1_{loc}(I)$ **diremo che** $v \in L^1_{loc}(I)$ **è la derivata debole di** u **se**

$$\int_a^b u\varphi' dx = - \int_a^b v\varphi dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(I). \quad (6.2.4)$$

Applicando il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 4.19, la funzione v è univocamente determinata.

In seguito indicheremo con u' la funzione v che soddisfa (6.2.4).

Se una funzione u ha la derivata usuale questa coincide con la derivata debole.

Osserviamo che la derivata quasi ovunque di una funzione non sempre coincide con la derivata debole. Sia $I = (0, 2)$ e definiamo

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \end{cases}$$

La funzione u è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Proviamo che v è anche la derivata debole di u , cioè

$$\int_0^2 u\varphi' dt = - \int_0^2 v\varphi dt,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\varphi' dt &= \int_0^1 t\varphi' dt + \int_0^2 \varphi' dt = \\ &= [t\varphi]_0^1 - \int_0^1 \varphi dt + [\varphi]_1^2 = - \int_0^1 \varphi dt = - \int_0^2 v\varphi dt. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

La funzione u è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è ancora data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

In questo caso si vede che v non è la derivata debole di u , infatti per una generica $\varphi \in C_0^\infty(I)$, si ha

$$\int_0^2 u\varphi' dt = \int_0^1 t\varphi' dt + 2 \int_1^2 \varphi' dt = - \int_0^1 \varphi dt - \varphi(1) \neq - \int_0^2 v\varphi dt \quad (6.2.5)$$

Supponiamo che u abbia derivata debole e quindi esiste $\bar{v}$ che soddisfa (6.2.4) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

Sia $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(I)$ una successione tale che $0 \leq \varphi_k(t) \leq 1$, $\varphi_k(1) = 1$ e $\varphi_k(t) \rightarrow 0$ per ogni $t \neq 1$, allora

$$- \int_0^2 \bar{v}\varphi_k dt = \int_0^2 u\varphi_k' dt = - \int_0^1 \varphi_k dt - \varphi_k(1)$$

Dal teorema di passaggio al limite di Lebesgue segue:

$$1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k(1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_0^2 \bar{v}\varphi_k dt - \int_0^1 \varphi_k dt \right) = 0.$$

Possiamo concludere che se una funzione è quasi ovunque derivabile anche se la derivata è di classe L_{loc}^1 non è detto che sia dotata di derivata debole.

OSSERVAZIONE 6.1. — Derivate nel senso delle distribuzioni. Consideriamo in $I = (-1, 1)$:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (6.2.6)$$

Supponiamo che H sia debolmente derivabile ed indichiamo $\delta \in L_{loc}^1(I)$ la sua derivata debole e quindi per ogni $\varphi \in C^\infty((-1, 1))$

$$\int_{-1}^1 \delta\varphi dt = - \int_{-1}^1 H(t)\varphi' dt = - \int_0^1 \varphi' dt = \varphi(0).$$

Sia $\varphi \in C^\infty((0, 1))$ e prolunghiamola in $(-1, 0)$ con $\varphi = 0$, si ha

$$\int_{-1}^1 \delta\varphi dt = 0$$

da cui segue che $\delta = 0$ quasi ovunque in $[0, 1)$ ed in modo analogo si prova che $\delta = 0$ quasi ovunque in $(-1, 0]$. Segue che per ogni $\varphi \in C^\infty((-1, 1))$ si ha

$$0 = \int_{-1}^1 \delta\varphi dt = \varphi(0).$$

Si conclude che H non è debolmente derivabile.

La nozione di derivata si può ulteriormente indebolire introducendo il concetto di funzione generalizzata o distribuzione.

Si definisce distribuzione un funzionale lineare e continuo U definito in $C_0^\infty(I)$ dove I è un intervallo aperto di R , cioè

$$U : \phi \in C_0^\infty(I) \rightarrow U(\phi) \in R.$$

Si definisce la derivata di una distribuzione U il funzionale:

$$U'(\phi) = -U(\phi').$$

Ogni funzione $u \in L_{loc}^1(I)$ definita in I e localmente sommabile è una distribuzione in quanto determina il funzionale della forma

$$U : \phi \in C_0^\infty(I) \rightarrow \int_I u(x)\phi(x)dx$$

Sia $u \in L_{loc}^1(I)$ e il funzionale lineare e continuo U ad essa associata. Se la derivata nel senso delle distribuzioni di U è definito attraverso una funzione $v \in L_{loc}^1(I)$ localmente sommabile, u è derivabile nel senso della Definizione 1 e v è la sua derivata debole.

Consideriamo la funzione H come una distribuzione U in $(-1, 1)$, per ogni $\phi \in C_0^\infty(-1, 1)$ si ha che

$$U(\phi) = \int_{-1}^1 H(t)\phi(t) dt = \int_0^1 \phi(t) dt$$

si ha allora che

$$U'(\phi) = \int_0^1 \phi'(t) dt = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

La derivata nel senso delle distribuzioni della funzione H e il funzionale $\delta_0(\phi) = \phi(0)$.

6.3 Spazi di Sobolev

Diamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE 6.2. *—Per $1 \leq p \leq +\infty$, Denotiamo con $W^{1,p}(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $u \in L^p(I)$ con derivata debole in $L^p(I)$. Lo spazio $W^{1,p}(I)$ si chiama spazio di Sobolev sull'insieme I .*

Se $u \in C^1 \cap L^p$ e la derivata usuale $u' \in L^p$, dall'integrazione per parti u e u' soddisfano (6.2.4) e quindi in particolare $u \in W^{1,p}(I)$.

Lo spazio $W^{1,p}(I)$ è uno spazio vettoriale normato con la seguente norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p \quad (6.3.7)$$

e dalle proprietà degli spazi $L^p(I)$ segue facilmente

- Se $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach. Sia u_n una successione di Cauchy in $W^{1,p}(I)$ allora u_n e u'_n sono di Cauchy in L^p e quindi convergono rispettivamente a u e a v . Si vede facilmente che $u' = v$ infatti:

$$\int_I v \varphi \, dx = \lim_k \int_I u'_k \varphi \, dx = - \lim_k \int_I u_k \varphi' \, dx = \int_I u \varphi' \, dx. \quad (6.3.8)$$

- Per $p = 2$, $W^{1,2}(I)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v)_{1,2} = (u, v)_2 + (u', v')_2 = \int_a^b u' v' \, dx + \int_a^b uv \, dx.$$

- Per $1 < p < +\infty$ $W^{1,p}(I)$ è uno spazio riflessivo.

Consideriamo l'operatore $T : u \in W^{1,p}(I) \rightarrow (u, u') \in L^p \times L^p$. L'operatore T è un'isometria tra $W^{1,p}(I)$ e $W = T(W^{1,p}(I))$. dal momento che W è un sottospazio completo di $L^p \times L^p$ 'e anche chiuso e quindi riflessivo.

- $1 < p < +\infty$, $W^{1,p}(I)$ è uno spazio separabile.

OSSERVAZIONE 6.2. – *Gli spazi di Sobolev possono anche essere considerati in qualche senso il completamento dell'insieme delle funzioni regolari e la loro introduzione permette di trovare minimi di funzionali ad esempio di tipo integrale come J in (6.1.3).*

Consideriamo g funzione reale di variabile reale definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ e il seguente problema di minimo

$$g(\bar{t}) = \text{Min}_{t \in [a,b] \cap Q} g(t),$$

dove Q rappresenta l'insieme dei numeri razionali. È noto che tale problema non ha soluzione, ma se consideriamo lo stesso problema in tutto $[a, b]$

$$g(\bar{t}) = \text{Min}_{t \in [a,b]} g(t),$$

grazie al teorema di Weierstrass, ammette soluzione.

Una situazione analoga si incontra per i problemi di minimo di funzionali ad esempio del tipo (6.1.3) e l'introduzione degli spazi di Sobolev corrisponde all'introduzione dei numeri reali come completamento dell'insieme dei numeri razionali attraverso i numeri irrazionali.

Per stabilire l'esistenza di minimo per un funzionale J definito, ad esempio in $C^1(a, b)$, si deve considerare un completamento dello spazio delle funzioni regolari.

In questa direzione, definito lo spazio delle funzioni $C^1(I)$ tali che

$$C^{1,p}(I) = \{u \in C^1(I) : \|u\|_{W^{1,p}} < +\infty\}.$$

denotiamo con $H^{1,p}(I)$ il completamento di $C^{1,p}(I)$ nella norma di Sobolev (6.3.7).

*Nel 1960 Meyers- Serrin dimostrarono che $H^{1,p}(I) = W^{1,p}(I)$. (per la dimostrazione si veda ad esempio, E. Giusti, *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, Pitagora Editrice, UMI, 1978).*

Proviamo che le funzioni di $W^{1,p}(I)$ sono in qualche senso le primitive delle funzioni di L^p . Vale infatti il seguente teorema:

TEOREMA 6.1. – *Sia $u \in W^{1,p}(I)$ allora esiste una funzione $\tilde{u} \in C^0$ tale che*

$$u(x) = \tilde{u}(x) \quad \text{quasi ogni } x \in I,$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt. \quad (6.3.9)$$

OSSERVAZIONE 6.3. – *Dal momento che le funzioni in $W^{1,p}(I)$ che sono quasi ovunque in I sono identificate grazie alla relazione di equivalenza, il teorema precedente afferma che ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$ ammette un unico rappresentante continuo cioè esiste una funzione continua che appartiene alla stessa classe di equivalenza di u . In seguito si fa riferimento al rappresentante continuo di u , che sarà denotato ancora con u , tuttavia va osservato che dire che esiste un rappresentante continuo è diverso dall'affermare che u è quasi ovunque continua.*

OSSERVAZIONE 6.4. – *Osserviamo inoltre che se $u \in W^{1,p}(I)$ e la derivata debole è di classe $C^0(I)$ allora u' è anche la derivata classica di u .*

Alla dimostrazione del Teorema 6.1, premettiamo due lemmi.

LEMMA 6.1. – *Sia $g \in L^1_{loc}(I)$ e fissato $y_0 \in I$ definiamo per $x \in I$*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t) dt,$$

allora $v \in C^0$ **e per ogni** $\varphi \in C_0^\infty$ **vale**

$$\int_I v(t)\varphi'(t) dt = - \int_I g(t)\varphi(t) dt,$$

quindi g **è la derivata debole di** v .

Dimostrazione. La funzione v è continua in I , inoltre

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x)\varphi'(x)dx &= \int_a^b \varphi'(x) \int_{y_0}^x g(t) dt dx = \\ &= \int_a^{y_0} \varphi'(x) \left[- \int_x^{y_0} g(t) dt \right] dx + \int_{y_0}^b \varphi'(x) \left[\int_{y_0}^x g(t) dt \right] dx. \end{aligned}$$

Tenendo conto del fatto che

$$\{(x, t) : a \leq x \leq y_0, \quad x \leq t \leq y_0\} = \{(x, t) : a \leq t \leq y_0, \quad a \leq x \leq t\}$$

ed inoltre

$$\{(x, t) : y_0 \leq x \leq b, \quad y_0 \leq t \leq x\} = \{(x, t) : y_0 \leq t \leq b, \quad t \leq x \leq b\}$$

applicando il teorema di Fubini si ottiene:

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^{y_0} g(t) \int_a^t \varphi'(x)dx dt + \int_{y_0}^b g(t) \int_t^b \varphi'(x)dx dt,$$

dal momento che $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, segue:

$$\int_a^b v(x)\varphi'(x)dx = - \int_a^b g(t)\varphi(t) dt.$$

Inoltre $v \in C^0(I)$ per l'assoluta continuità dell'integrale.

LEMMA 6.2. – **Sia** $f \in L_{loc}^1(I)$ **tale che**

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C_0^1(I),$$

allora $f(x) = c$, **con** $c \in R$ **per quasi ogni** $x \in I$.

Dimostrazione. Sia $w \in C_0^0(I)$ e consideriamo $\psi \in C_0^0(I)$ tale che $\int_a^b \psi(x)dx = 1$. Definiamo la funzione a supporto compatto in I :

$$h(t) = w(t) - \psi(t) \int_a^b w(x) dx,$$

e sia φ la primitiva di h , $\varphi'(t) = h(t)$. Dal momento che $\int_a^b h(t) dt = 0$, si ha che $\varphi \in C_0^1(I)$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b f(t) \varphi'(t) dt = \int_a^b f(t) \left[w(t) - \psi(t) \int_a^b w(x) dx \right] dt = \\ &= \int_a^b f(t) w(t) dt - \int_a^b w(t) dt \int_a^b f(x) \psi(x) dx = \int_a^b w(t) \left[f(t) - \int_a^b f(x) \psi(x) dx \right] dt. \end{aligned}$$

Poiché la relazione precedente vale per ogni $w \in C^0$, dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni segue che quasi ovunque in I , $f(x) = \int_a^b f(x) \psi(x) dx$.

Dimostrazione del teorema 6.1.

Dimostrazione. Per $y_0 \in I$ poniamo

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t) dt.$$

Dal lemma 1 si ha u' è la derivata debole di $\bar{u}$ e quindi dal momento che u e $\bar{u}$ hanno la stessa derivata debole segue che

$$\int_a^b \bar{u}(t) \varphi'(t) dt = - \int_a^b u'(t) \varphi(t) dt = \int_a^b u(t) \varphi'(t) dt,$$

e quindi

$$\int_a^b (\bar{u}(t) - u(t)) \varphi'(t) dt = 0$$

quindi, per il lemma 2, $\bar{u} - u$ è una funzione costante quasi ovunque in I segue che $u = \bar{u} + C$ ed inoltre $C = u(y_0)$

OSSERVAZIONE 6.5. *—Si ha quindi che una funzione con derivata debole nulla è quasi ovunque costante.*

Inoltre, dal teorema 6.1 segue che se $u \in W^{1,p}$ con $p > 1$ allora è Holderiana, infatti

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_y^x |u'(t)| dt \leq \|u'\|_p |x - y|^{1 - \frac{1}{p}}.$$

OSSERVAZIONE 6.6. *—Funzioni assolutamente continue. Diremo che $u : I = (a, b) \rightarrow R$ è assolutamente continua se esiste $v \in L^1(I)$ tale che*

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t) dt.$$

in altre parole quando u è la primitiva di una funzione sommabile v .

Una funzione assolutamente continua è quindi derivabile nel senso debole e la sua derivata debole è una funzione sommabile. Segue per il teorema precedente che $W^{1,1}(I)$ coincide con l'insieme delle funzioni assolutamente continue. Si dimostra le seguente caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue:

Una funzione u è assolutamente continua se:

$\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni decomposizione $[a_1, b_2], \dots, [a_n, b_n]$ di sottointervalli di I a due a due disgiunti e tali che $\sum_1^n |b_i - a_i| < \delta$ si ha $\sum_1^n |u(b_i) - u(a_i)| < \epsilon$.

Osserviamo che una funzione assolutamente continua è anche uniformemente continua ma non vale il viceversa.

6.4 Rapporti incrementali

Vale inoltre il seguente risultato che caratterizza i rapporti incrementali delle funzioni che appartengono a spazi di Sobolev.

TEOREMA 6.2. — *Sia $1 < p \leq +\infty$ e $u \in L^p(I)$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) $u \in W^{1,p}(I)$;
- (ii) Esiste $c = c(I, p)$ tale che per ogni $\varphi \in C_0^\infty$

$$\left| \int_I u \varphi' dx \right| \leq c \|\varphi\|_q \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

- (iii) Esiste c tale che per ogni $I_0, \bar{I}_0 \subset I$ e $h > 0$ con $|h| < \text{dist}(I_0, (-I))$, dove $(-I)$ denota l'insieme complementare di I si ha

$$\left(\int_{I_0} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c|h|, \quad 1 < p < +\infty,$$

$$|u(x+h) - u(x)| \leq c|h|, \quad x \in I_0 \quad p = +\infty.$$

In (ii) e (iii) si ha $c = \|u'\|_p$.

Dimostrazione. Proviamo che **(i)** implica **(ii)**. Dalla disuguaglianza di Holder e dal fatto che $u' \in L^p$, si ha

$$\left| \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b u'(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|u'\|_p \|\varphi\|_q.$$

(ii) $\implies$ **(i)**. Consideriamo il funzionale in C_0^∞ definito

$$F : \varphi \rightarrow \int_a^b u(x) \varphi'(x) dx,$$

poiché $p > 1$ si ha che $1 \leq q < +\infty$, dal Teorema di Hahn-Banach segue che F si può prolungare in tutto L^q .

Quindi esiste $v \in L^p$ tale che

$$F(w) = \int_a^b v(x) w(x) dx, \quad \forall w \in L^q.$$

In particolare $\varphi \in C_0^\infty$ si ha

$$\int_a^b u(x) \varphi'(x) dx = \int_a^b v(x) \varphi(x) dx$$

quindi $(-v)$ è la derivata debole di u e $u \in W^{1,p}$.

Proviamo che **(i)** implica **(iii)**. Per ogni $x \in I_0$, si ha

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt = h \int_0^1 u'(x+sh) ds,$$

e dunque

$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h| \int_0^1 |u'(x+sh)| ds,$$

l'ultima relazione implica **(iii)**, nel caso $p = \infty$.

Se $1 < p < +\infty$, dalla disuguaglianza di Holder

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

Integrando ambo i membri su I_0 :

$$\int_{I_0} |u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{I_0} |u'(x+sh)|^p dx.$$

Scegliendo $|h| < \text{dist}(I_0, R - I)$, si ha che se $x \in I_0$, $x+h \in I$ (vale che $I_0 + sh \subset I$)

$$\int_{I_0} |u'(x+sh)|^p dx = \int_{I_0+sh} |u'(y)|^p dy \leq \int_I |u'(y)|^p dy,$$

mettendo insieme le ultime due disuguaglianze segue **(iii)**.

Proviamo che **(iii)** implica **(ii)**. Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $I_0 \subset \bar{I}_0 \subset I$ e $|h| < \text{dist}(I_0, R-I)$.

Supponiamo $1 < p < +\infty$, osserviamo che da **(iii)** se $\text{Supp } \varphi \subset I_0$, si ha

$$\left| \int_I [u(x+h) - u(x)] \varphi(x) dx \right| \leq \left(\int_I |u(x+h) - u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_q dx \leq c|h| \|\varphi\|_q,$$

e per $p = +\infty$,

$$\left| \int_I [u(x+h) - u(x)] \varphi(x) dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_1.$$

Operando il cambiamento di variabili

$$\int_I u(x+h) \varphi(x) dx = \int_I u(x) \varphi(x-h) dx,$$

si ottiene

$$\left| \int_I u(x) [\varphi(x-h) - \varphi(x)] dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_q,$$

e dividendo per $|h|$ e facendo tendere h a 0 si ha

$$\left| \int_I u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_q.$$

Nel caso $p = +\infty$ si procede allo stesso modo.

OSSERVAZIONE 6.7. –

- **La terza condizione permette di identificare $W^{1,\infty}$ con la classe delle funzioni Lipschitziane $C^{0,1}$ nel caso I sia un intervallo aperto e limitato. Infatti vale**

$$u \in W^{1,\infty} \implies |u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty |x - y|.$$

Tuttavia poiché gli elementi di $W^{1,\infty}$ sono definite quasi ovunque, il teorema afferma che esiste un rappresentante Lipschitziano.

In particolare osserviamo che da $(i) \iff (iii)$ segue che per $u \in L^\infty(I)$ vale che $u \in W^{1,\infty}$ se e solo se esiste una costante C tale che

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \quad \text{q.o.} \quad x, y \in I$$

- Osserviamo che nel caso $p = 1$, procedendo come nel precedente teorema si ha

$$(i) \implies (ii) \iff (iii).$$

Le funzioni che soddisfano (ii) o (iii) vengono chiamate funzioni a variazione limitata.

OSSERVAZIONE 6.8. — *Spazi di Sobolev $W^{2,p}$. Osserviamo che attraverso una naturale estensione della precedente definizione di spazio di Sobolev, si definisce lo spazio $W^{2,p}(I)$ delle funzioni di classe L^p con derivata prima e seconda debole in L^p . $W^{2,p}(I)$ è uno spazio di Banach con la norma:*

$$\|u\|_{2,p} = (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p + \|u''\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

6.5 Teoremi di immersione

Per gli spazi di Sobolev valgono alcune proprietà di prolungamento e di densità per le dimostrazioni rimandiamo al libro di H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Theorie et applications*, Masson, (1983)

TEOREMA 6.3. — *Sia $1 \leq p \leq +\infty$, $|I| \leq +\infty$, esiste un operatore di prolungamento $P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(R)$ lineare e continuo tale che*

- $P(u)(x) = u(x)$, per $x \in I$;
- *Esiste una costante C dipendente dalla misura di I tale che per ogni $u \in W^{1,p}(I)$:*

$$\|P(u)\|_{L^p(R)} \leq C\|u\|_{L^p(I)},$$

$$\|P(u)\|_{W^{1,p}(R)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

TEOREMA 6.4. — *Sia $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < +\infty$, allora esiste una successione u_k in $C_0^\infty(R)$ tale che la restrizione di u_k a I , che indichiamo con u_k/I , converge a u in $W^{1,p}(I)$.*

OSSERVAZIONE 6.9. — **In generale non si può scegliere nel teorema precedente una successione u_k di $C_0^\infty(I)$. In altre parole $C_0^\infty(I)$ non è denso in $W^{1,p}(I)$, a meno che $I = R$.**

Dimostriamo alcuni teoremi di **immersione** che danno informazioni di regolarità e/o sommabilità per funzioni che appartengono a $W^{1,p}(I)$.

TEOREMA 6.5. — **Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$, esiste una costante C dipendente dalla misura di I , $|I| \leq +\infty$, tale che**

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad 1 \leq p \leq +\infty. \quad (6.5.10)$$

in altre parole l'operatore lineare d'immersione $u \in W^{1,p}(I) \rightarrow u \in L^\infty(I)$ immersione è continuo per ogni $1 \leq p \leq +\infty$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare (7.2.4) nel caso $I = R$. Il caso $I \subset R$ segue dal teorema di prolungamento 6.3, infatti per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste $Pu \in W^{1,p}(R)$ tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|Pu\|_{L^\infty(R)} \leq C\|Pu\|_{W^{1,p}(R)} \leq C_1\|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Sia $v \in C_0^1(R)$ e per $1 \leq p < +\infty$, definiamo $G(s) = |s|^{p-1}s$, si ha

$$w(x) = G(v(x)) = |v(x)|^{p-1}v(x), \quad w \in C_0^1(R), \quad \text{e} \quad w' = p|v(x)|^{p-1}v'(x).$$

dal momento che:

$$w(x) = \int_{-\infty}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t) dt,$$

e per la disuguaglianza di Holder

$$|w(x)| = |v(x)|^p \leq p \left[\int |v|^p dx \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int |v'|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

e dalla relazione

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} \quad a, b > 0,$$

si ha

$$|v(x)|^p \leq p \left(\frac{p-1}{p} \int |v|^p dx + \frac{1}{p} \int |v'|^p dx \right) \leq p\|v\|_{1,p}^p$$

e quindi

$$\|v(x)\|_\infty \leq p^{\frac{1}{p}}\|v\|_{1,p}.$$

Sia $u \in W^{1,p}(R)$, dal teorema di densità 6.4, esiste $(u_k) \subset C_0^1(R)$ che converge a u nella norma di $W^{1,p}$, allora per ogni k, h si ha

$$\|u_h - u_k\|_{L^\infty} \leq C \|u_h - u_k\|_{W^{1,p}}.$$

che implica che (u_h) è di Cauchy nella norma di L^∞ e quindi converge a u anche in L^∞ , da cui segue (6.5.10).

DEFINIZIONE 6.3. — *Un operatore $T : X \rightarrow Y$ tra due spazi metrici completi X, Y si dice **Compatto** quando*

1. *T è continuo;*
2. *T trasforma limitati di X in relativamente compatti di Y .*

Se X, Y sono spazi di Banach e T è lineare la seconda condizione implica la prima. Infatti gli insiemi relativamente compatti sono limitati ed un operatore lineare è continuo se trasforma limitati in limitati.

Se X, Y sono spazi di Banach, la proprietà di compattezza implica se x_k è una successione limitata nella norma di X allora la successione $T(x_k)$ ha una sottosuccessione che converge in Y .

Vale il seguente criterio di compattezza di Ascoli-Arzelà di compattezza per la convergenza uniforme:

TEOREMA 6.6. — *Sia K un insieme compatto di R^n ed B un sottoinsieme limitato di $C^0(K)$. Se gli elementi di B sono:*

- **Equilimitati:** *esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$, $x \in K$, per ogni $f \in B$;*
- **Equicontinui:** *per ogni $\epsilon > 0$ esiste δ_ϵ tale che se $|x - x'| < \delta_\epsilon$ vale $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ per ogni $f \in B$;*

allora B è compatto in $C^0(K)$.

Negli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ con $p > 1$ vale il seguente teorema di immersione compatta:

TEOREMA 6.7. — *Sia I è limitato, allora si ha che l'immersione $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ è compatta per $1 < p \leq +\infty$.*

Dimostrazione. Denotiamo $B = \{u \in W^{1,p}(I) : \|u\|_{1,p} \leq 1\}$. Proviamo che B è un sottoinsieme di $C^0(I)$ costituito da funzioni equicontinue ed equilimate. Infatti

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_p |x - y|^{\frac{p-1}{p}} \leq |x - y|^{\frac{p-1}{p}},$$

quindi gli elementi di B sono equiholderiani. Gli elementi di B sono anche equilimitati, infatti dalla maggiorazione del Teorema 6.5 segue che esiste C tale $\|v\|_\infty \leq C$, per ogni $u \in B$. Dal teorema di Ascoli-Arzelà segue che B è compatto rispetto alla convergenza uniforme.

Valgono inoltre le seguenti proprietà (H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Theorie et applications*, Masson, (1983)):

- L'immersione $W^{1,p}(I) \subset L^p(I)$ è compatta, infatti le successioni limitate nella norma $W^{1,p}(I)$ sono uniformemente convergenti e quindi hanno un'estratta che converge nella norma di L^p .
- L'immersione $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ è compatta per $1 \leq q \leq +\infty$.
- L'immersione $W^{1,1}(I) \subset C(I)$ è continua ma non è compatta anche se I è limitato.

OSSERVAZIONE 6.10. *—Diamo qualche proprietà di $W^{1,p}(I)$ nel caso I non è limitato. Se $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < +\infty$, si ha*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0.$$

Infatti sia $(u_k) \subset C_0^1(R)$ e le cui restrizioni convergono ad $u \in W^{1,p}(I)$. Dal teorema di immersione si ha che

$$\|u_k - u\|_\infty < \epsilon, \quad k > k_0.$$

Sia $|x| > M$ tale che per k abbastanza grande $u_k(x) = 0$, allora

$$|u(x)| \leq |u(x) - u_k(x)| + |u_k(x)| \leq \epsilon,$$

da cui segue la tesi.

Inoltre quando I non è limitato e $u \in W^{1,p}(I)$ allora $u \in L^q$ per ogni $q \geq p$, infatti vale

$$\int |u|^q dx \leq \|u\|_\infty^{q-p} \|u\|_p,$$

ma in generale $u \notin L^q$ per $1 < q < p$.

6.6 Proprietà delle derivate deboli

Per le funzioni $u \in W^{1,p}(I)$ le derivate deboli hanno alcune proprietà analoghe alle derivate classiche:

TEOREMA 6.8. – Derivazione di un prodotto. *Siano $u, v \in W^{1,p}$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $uv \in W^{1,p}$ e*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Inoltre

$$\int_y^x u'v \, dt = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \, dt.$$

Dimostrazione. Dai risultati di immersione segue che $u \in L^\infty$ e quindi $uv \in L^p$.

Sia $1 \leq p < \infty$ e u_n, v_n in $C_0^1(R)$ le cui restrizioni convergono a u e v rispettivamente in $W^{1,p}$. Si ha quindi

$$u_n \rightarrow u \quad \text{e} \quad v_n \rightarrow v \quad \text{in} \quad L^\infty$$

segue che

$$u_n v_n \rightarrow uv \quad \text{in} \quad L^\infty \text{ e anche in } L^p.$$

Da altra parte, poiché

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \rightarrow u'v + uv'$$

Si ha che $u_n v_n \rightarrow uv$ e $(u_n v_n)' \rightarrow u'v + uv'$ in L^p e quindi procedendo come in (6.3.8) segue $(uv)' = u'v + uv'$.

Per $p = \infty$, siano $u, v \in W^{1,\infty}$ si ha $uv \in L^\infty$ e $u'v + uv' \in L^\infty$, dobbiamo provare che per ogni $\varphi \in C_0^1$:

$$\int_I uv\varphi' \, dt = - \int_I (u'v + uv')\varphi \, dx.$$

Poiché per ogni limitato $J \subset I$ si ha che $u, v \in W^{1,p}(J)$ per la prima parte della dimostrazione segue che

$$\int_J uv\varphi' \, dt = - \int_J (u'v + uv')\varphi \, dx.$$

che conclude la prova.

TEOREMA 6.9. – Derivata debole di una funzione composta. *Sia $G \in C^1(R)$ con $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}$ allora la funzione composta di G e u appartiene ancora a $W^{1,p}$ e vale*

$$(G(u(x)))' = G'(u(x))u'(x)$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi su G segue che $|G(s)| \leq C|s|$ per $s \in [-M, M]$ e poiché $u \in L^\infty$ si ha $|G(u(x))| \leq |u(x)|$ e quindi $G(u(x)) \in L^p$.

Inoltre $G'(u(x))u'(x) \in L^p$.

Dobbiamo provare che per ogni $\varphi \in C_0^1$:

$$\int G(u(x))\varphi' dx = \int G'(u(x))u'(x)\varphi dx.$$

Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $u_n \in C_0^1(R)$ con le restrizioni che convergono ad u in $W^{1,p}$. Dal momento che $u_n \rightarrow u$ in L^∞ si ha anche che $G(u_n) \rightarrow G(u)$ in L^∞ e $G'(u_n)u'_n \rightarrow G'(u)u'$ in L^p .

Per i teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, dalla relazione

$$\int G(u_n)\varphi' dx = - \int G'(u_n)u'_n\varphi dx.$$

segue la tesi. Per il caso $p = \infty$ si ragiona come nel teorema precedente.

6.7 Lo spazio $W_0^{1,p}$

DEFINIZIONE 6.4. – *Sia $1 \leq p \leq +\infty$, $W_0^{1,p}(I)$ denota la chiusura di $C_0^1(I)$ nella norma di $W^{1,p}(I)$: ogni funzione di $W_0^{1,p}(I)$ è limite nella norma di $W^{1,p}(I)$ di una successione di elementi di $C_0^1(I)$.*

Lo spazio $W_0^{1,p}(I)$ munito della norma indotta da $W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach separabile per $1 \leq p < +\infty$ e riflessivo $1 < p < +\infty$.

In particolare per $p = 2$ è uno spazio di Hilbert.

Se $I = R$, dal teorema di densità $W_0^{1,p}(R) = W^{1,p}(R)$.

Si ha inoltre

- $C_0^\infty(I)$ è denso in $W_0^{1,p}(I)$.

- Se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_0^0(I)$ allora $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Utilizzando le proprietà delle funzioni regolarizzate di u , u_ϵ , (Sezione 4.5 del Capitolo 4), segue che u_ϵ convergono a u ed inoltre si ha

$$(u')_\epsilon = (u_\epsilon)'$$

Infatti:

$$\begin{aligned} - \int (u_\epsilon)' \psi \, dx &= \int u_\epsilon \psi' \, dx = \int \left[\int u(x-z) \varphi_\epsilon(z) \, dz \right] \psi'(x) \, dx = \\ &= \int \int u(x-z) \psi'(x) \varphi_\epsilon(z) \, dz \, dx = - \int \left[\int u'(x-z) \varphi_\epsilon(z) \, dz \right] \psi(x) \, dx \end{aligned}$$

da cui segue

$$- \int (u_\epsilon)' \psi \, dx = - \int (u')_\epsilon \psi \, dx.$$

Quindi u_ϵ converge a u in $W^{1,p}(I)$.

OSSERVAZIONE 6.11. *—In generale vale che se $g \in L^1$ e $v \in W^{1,p}(I)$ il prodotto di convoluzione $g * v \in W^{1,p}(I)$ e $(g * v)' = g * v'$.*

Diamo una caratterizzazione delle funzioni $W_0^{1,p}(I)$

TEOREMA 6.10. *—Sia $u \in W^{1,p}(I)$ allora $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e solo se $u = 0$ agli estremi dell'intervallo I .*

Dimostrazione. Supponiamo I limitato e sia $u \in W_0^{1,p}(I)$, allora per definizione esiste $u_k \in C_0^1(I)$ che converge a u nella norma di Sobolev. Quindi converge uniformemente in I e quindi $u = 0$ sulla frontiera di I .

Data $u \in W^{1,p}(I)$ con $u = 0$ sulla frontiera di I sia $G \in C^1(R)$ tale che

- $G(t) = 0$ per $|t| \leq 1$ e $G(t) = t$ per $|t| \geq 2$;
- $|G(t)| \leq |t|$ per ogni $t \in R$.

Definiamo

$$u_k(x) = \frac{1}{k} G(ku(x)).$$

Dalle proprietà di G segue

$$|u_k(x)| = \frac{1}{k} G(ku(x)) \leq |u(x)|,$$

$$|u'_k(x)| \leq |G'(ku(x))||u'(x)| \leq M|u'(x)|,$$

che implica che $u_k \in W^{1,p}(I)$ ed inoltre

$$\text{Supp } u_k \subset \left\{ x \in I : |u_k(x)| \geq \frac{1}{k} \right\} \subset I,$$

dal momento che $u = 0$ su ∂I . Segue che $u_k \in W^{1,p}(I) \cap C_0^0(I)$. Dal momento che $u_k \rightarrow u$ e $(u_k)' \rightarrow u'$ quasi ovunque in I , dal teorema di Lebesgue della convergenza dominata si ha che u_k converge a u in $W^{1,p}(I)$ e quindi $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Vale inoltre la seguente disuguaglianza di Poincaré:

TEOREMA 6.11. — *Sia I un intervallo limitato allora esiste una costante C dipendente solo dalla misura di I , tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(I)$ vale*

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}. \quad (6.7.11)$$

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$ e quindi $u(a) = u(b) = 0$. Sia $p = 1$

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| \leq \int_a^x |u'(t)| dt,$$

da cui segue $\|u\|_{L^1} \leq (b-a)\|u'\|_{L^1}$.

Sia $p > 1$, allora

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)| dt \leq (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \|u'\|_{L^p},$$

da cui segue

$$\int_a^b |u(t)|^p dt \leq (b-a)^p \int_a^b |u'(t)|^p dt$$

e quindi la tesi.

OSSERVAZIONE 6.12. — *Osserviamo inoltre che nella precedente dimostrazione abbiamo usato solo che $u(a) = 0$ e naturalmente si ha la stessa relazione se $u(b) = 0$. La disuguaglianza di Poincaré vale anche in queste ipotesi più deboli.*

OSSERVAZIONE 6.13. — *Dalla disuguaglianza 6.7.11 si ha*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = [\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p]^{\frac{1}{p}} \leq C\|u'\|_{L^p},$$

quindi segue che in $W_0^{1,p}(I)$ la norma della sola derivata $\|u'\|_{L^p}$ è equivalente alla norma $\|u\|_{W^{1,p}}$. Inoltre in $W_0^{1,2}(I)$ si ha che (u', v') è un prodotto scalare che genera una norma equivalente a quella di Sobolev.

6.8 Convergenza debole in $W^{1,p}$

Nello spazio $W^{1,p}(I)$ si può introdurre la topologia debole quando $1 \leq p < +\infty$ e se $p = +\infty$ la topologia debole*.

DEFINIZIONE 6.5. — *Data una successione $(u_k) \subset W^{1,p}(I)$ diremo che converge debole, se $1 \leq p < +\infty$ o debole* se $p = +\infty$ quando (u_k) e (u'_k) convergono debole o debole* in $L^p(I)$ o $L^\infty(I)$ ad u ed u' rispettivamente*

Dal momento che $W^{1,p}(I)$ per $p > 1$ è uno spazio riflessivo, si ha da ogni successione limitata in norma si può estrarre una sottosuccessione che converge nella topologia debole.

Vale inoltre il seguente teorema di compattezza:

TEOREMA 6.12. — *Sia u_k una successione in $W^{1,p}(I)$, $1 < p < \infty$. Se le norme $\|u'_k\|_p$ sono limitate ed inoltre $|u_k(a)| \leq M$ allora esiste $u \in W^{1,p}(I)$ ed un estratta di u_k che converge uniformemente ad u . Inoltre la successione u'_k converge ad u' nella topologia debole di L^p .*

Dimostrazione. Sia $I = (a, b)$, si ha

$$|u_k(x) - u_k(y)| \leq C|x - y|^{1-\frac{1}{p}}$$

e quindi la successione è equiholderiana e quindi equicontinua. Osserviamo che:

$$|u_k(x)| \leq |u_k(a)| + |u_k(x) - u_k(a)| \leq M + C|b - a|^{1-\frac{1}{p}}$$

e quindi anche equilimitate. Applicando il teorema di Ascoli-Arzelà esiste un estratta che denotiamo ancora con u_k che converge uniformemente a u .

Da altra parte la successione u'_k converge nella topologia debole di L^p e non può avere come limite u' . Supponiamo che (u_k) converga debole a u in $L^p(I)$ e (u'_k) converga debole a v in $L^p(I)$, si ha che v è la derivata debole di u . Infatti

$$\int_I v \varphi \, dx = \lim_k \int_I u'_k \varphi \, dx = - \lim_k \int_I u_k \varphi' \, dx = \int_I u \varphi \, dx.$$

La dimostrazione è analoga quando $p = +\infty$.

OSSERVAZIONE 6.14. — *Il teorema continua a valere se supponiamo che $\|u_k\|_p$ e $\|u'_k\|_p$ sono limitate. Infatti, si vede facilmente che*

$$u_k(a) = u_k(x) - \int_a^b u'_k \, dx$$

quindi

$$(b-a)|u_k(a)| \leq \int_a^b |u_k(x)| + (b-a) \int_a^b |u'| dx$$

e la tesi segue dalla disuguaglianza di Holder.

OSSERVAZIONE 6.15. –Sia $1 < p < \infty$ e u_k una successione in $W^{1,p}(I)$, convergente nella topologia debole a u , allora la stessa successione (non un'estratta!) converge uniformemente a u . Osserviamo che che $\|u_k\|_p$ e $\|u'_k\|_p$ sono limitate. Consideriamo un estratta u_{k_h} per la compattezza si ha che ammette a sua volta un estratta che converge uniformemente alla funzione limite debole u . Quindi tutta la successione converge uniformemente a u .

OSSERVAZIONE 6.16. –Ricordiamo che i risultati di compattezza sono falsi quando $p = 1$, esistono infatti successioni limitate nella norma di L^1 che convergono a funzioni discontinue, a titolo d'esempio consideriamo la seguente successione $\Omega = (0, 1)$:

$$u_k(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1, -\frac{1}{k}) \\ kx & x \in (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \\ 1 & x \in (\frac{1}{k}, 1) \end{cases}$$

6.9 Formulazione variazionale di problemi ai limiti

Consideriamo il seguente problema

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.9.12)$$

con f funzione di classe C^0 .

La condizione agli estremi viene chiamata di Dirichlet omogenea.

Una soluzione classica è una funzione $u \in C^2(I)$ che verifica (6.9.12) per ogni $x \in I$. Sia $f \in L^2(0, 1)$.

Diremo che una funzione $u \in W_0^{1,2}(I)$ è una soluzione debole se:

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_a^b uv dx = \int_a^b fv dx \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,2}(I) \quad (6.9.13)$$

Dal procedimento di integrazione per parti segue che una soluzione classica è anche una soluzione debole. Vale il seguente teorema di esistenza ed unicità delle soluzioni deboli.

TEOREMA 6.13. *—Per ogni $f \in L^2$ esiste un'unica soluzione debole di (6.9.12) ed inoltre vale il Principio di Dirichlet: u è un minimo del funzionale in $v \in W_0^{1,2}(I)$*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (v')^2 + v^2 dx - \int_0^1 f v dx \quad (6.9.14)$$

Dimostrazione. Dal teorema di rappresentazione dei funzionali lineari nello spazio di Hilbert $W_0^{1,2}(I)$ con il prodotto scalare

$$(u, v)_{W^{1,2}} = \int_0^1 u' v' dx + \int_0^1 u v dx$$

si ha che esiste un'unica $\bar{u}$ tale che

$$(\bar{u}, v) = F(v) = \int_a^b f v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I)$$

segue che $\bar{u}$ soddisfa (6.9.13) ed è un minimo del funzionale in (6.9.14).

Regolarità della successione debole.

Dal momento che $\bar{u} \in W^{1,2}$ è una soluzione debole si ha che in particolare per $v \in C_0^1$ vale

$$\int_0^1 \bar{u}' v' dx = \int_0^1 (f - \bar{u}) v dx,$$

e quindi dalla definizione di derivata debole segue

$$(\bar{u}')' = -(f - \bar{u})$$

quindi la derivata seconda debole di $\bar{u}$ è la funzione $-(f - \bar{u}) \in L^2$, da cui segue che $\bar{u} \in W^{2,2}$.

Ritorno alla soluzione classica.

Se $f \in C^0$ allora $\bar{u} \in C^2$.

Infatti, poiché $\bar{u}' \in W^{1,2}$ dai risultati di immersione si ha che $\bar{u}' \in C^0$ e quindi $\bar{u} \in C^1$.

L'uguaglianza $(\bar{u}')' = -(f - \bar{u}) \in C^0$ dice che $\bar{u} \in C^2$ e integrando per parti segue che $\bar{u}$ è anche una soluzione classica.

Il procedimento precedente si può applicare ad un'ampia classe di problemi ai limiti.

• **Condizioni di Dirichlet non omogenee**

Consideriamo il problema in $I = (0, 1)$

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \quad (6.9.15)$$

Proviamo che per α, β assegnati e $f \in L^2$ esiste un'unica $u \in W^{1,2}(I)$ tale che $w \in W_0^{1,2}$

$$\int_0^1 \bar{u}' w' dx + \int_0^1 \bar{u} w dx = \int_0^1 f w dx \quad (6.9.16)$$

ed inoltre u è il minimo del funzionale J in (6.9.14) nella classe delle funzioni che soddisfano le condizioni agli estremi $u(0) = \alpha$ e $u(1) = \beta$.

Consideriamo il sottoinsieme **convesso chiuso** $K \subset W^{1,2}(I)$ definito da:

$$K = \{v \in W^{1,2}(I) : v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$$

Sia u è una soluzione classica, allora per ogni altra $v \in K$ dall'integrazione per parti segue:

$$\int_0^1 u'(v-u)' dx + \int_0^1 u(v-u) dx = \int_0^1 f(v-u) dx$$

dal momento che $v(0) - u(0) = v(1) - u(1) = 0$.

Consideriamo come prima il prodotto scalare in $W^{1,2}$ ed il funzionale $F = \int f w dx$, dal Teorema 5.12 si ha che esiste un unico $\bar{u} \in K$ tale che per ogni altra $v \in K$

$$\int_0^1 \bar{u}'(v-\bar{u})' dx + \int_0^1 \bar{u}(v-\bar{u}) dx \geq \int_0^1 f(v-\bar{u}) dx$$

Per $w \in W_0^{1,2}$, consideriamo $v = \bar{u} + w$ si ha $v \in K$ e

$$\int_0^1 \bar{u}' w' dx + \int_0^1 \bar{u} w dx \geq \int_0^1 f w dx$$

Per $v = \bar{u} - w$ si ha

$$\int_0^1 \bar{u}' w' dx + \int_0^1 \bar{u} w dx \leq \int_0^1 f w dx$$

segue l'uguaglianza (6.9.16) per ogni $w \in W_0^{1,2}$ e quindi $\bar{u}$ è una soluzione debole. Procedendo come nel teorema precedente si prova che $\bar{u} \in C^2$ ed è quindi anche una soluzione classica.

• **Problema di Sturm-Liouville**

Consideriamo

$$\begin{cases} -(pu')'(x) + qu(x) = f(x), & x \in I = (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.9.17)$$

dove $f \in L^2$, $p \in C^1(\bar{I})$ e $q \in C^0(\bar{I})$ con $p(x) \geq \alpha > 0$ e $q \geq 0$ in $\bar{I}$.

La formulazione debole del problema (6.9.17) è

$$\int_0^1 pu'v' dx + \int_0^1 quv dx = \int_a^b fv dx \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,2}(I) \quad (6.9.18)$$

Consideriamo la forma bilineare in $W_0^{1,2}(I)$:

$$a(u, v) = \int_0^1 pu'v' dx + \int_0^1 quv dx$$

a è continua e simmetrica. Inoltre, dalla disuguaglianza di Poincaré segue

$$a(v, v) \geq \alpha \int_0^1 (v')^2 dx \geq \alpha c \|v\|_{W^{1,2}}^2$$

quindi a è anche coerciva in $W_0^{1,2}(I)$. Dal teorema di Lax-Milgram esiste $\bar{u} \in W_0^{1,2}(I)$ tale che per ogni altro $v \in W_0^{1,2}(I)$

$$a(\bar{u}, v) = F(v) = \int_0^1 fv dx$$

inoltre $\bar{u}$ è minimo del funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 (p(v')^2 dx + qv^2) dx - \int_0^1 fv dx$$

Da altra parte, poiché

$$\int_0^1 p\bar{u}'v' dx = \int_0^1 (f - q\bar{u})v dx$$

per ogni $v \in C_0^1$, dalla definizione di derivata debole

$$(p\bar{u}')' = -(f - q\bar{u}),$$

quindi $p\bar{u}' \in W^{1,2}$, allora $\frac{1}{p}(p\bar{u}') \in W^{1,2}$ e cioè $\bar{u} \in W^{2,2}$.

Quando $f \in C^0$ segue che $\bar{u} \in C^2$ ed è anche una soluzione classica.

• **Condizioni di Neumann omogenee**

Consideriamo

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I = (0, 1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (6.9.19)$$

Si ha che per $f \in L^2$ esiste un'unica $\bar{u} \in W^{2,2}$ che soddisfa (6.9.19) ed inoltre $\bar{u}$ è minimo del funzionale $J(v)$ con $v \in W^{1,2}$. Se $f \in C^0$ segue che $\bar{u} \in C^2$ ed è anche una soluzione classica.

Se u è una soluzione classica, moltiplicando per v ed integrando per parti:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 u'' v \, dx + \int_0^1 uv \, dx &= \int_0^1 f v \, dx \\ \Rightarrow \int_0^1 u' v' \, dx + [u' v]_0^1 + \int_0^1 uv \, dx &= \int_0^1 f v \, dx \end{aligned}$$

Poiché $u'(0) = u'(1) = 0$ segue che per ogni $v \in W^{1,2}$ (e non in $W_0^{1,2}$ come nei casi precedenti)

$$\int_0^1 u' v' \, dx + \int_0^1 uv \, dx = \int_0^1 f v \, dx$$

Consideriamo la forma bilineare a ed il funzionale F in $W^{1,2}(I)$ come nel caso del problema di Dirichlet, allora dal teorema di rappresentazione di Lax-Milgram segue che esiste un'unica $\bar{u} \in W^{1,2}(I)$ tale che

$$\int_0^1 \bar{u}' v' \, dx + \int_0^1 \bar{u} v \, dx = \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in W^{1,2}(I)$$

Procedendo come prima si ha che $\bar{u} \in W^{2,2}(I)$ e dal momento che $\bar{u}' \in C^0$, le condizioni agli estremi acquistano significato.

Dall'integrazione per parti segue:

$$\int_0^1 (-\bar{u}'' + \bar{u} - f) v \, dx - \bar{u}'(1)v(1) - \bar{u}'(0)v(0) = 0$$

per ogni $v \in W^{1,2}(I)$ e scegliendo in particolare $v \in W_0^{1,2}(I)$ si ha $-\bar{u}'' + \bar{u} - f = 0$ quasi ovunque in I e quindi per continuità in tutto I .

Allora necessariamente $\bar{u}'(1)v(1) - \bar{u}'(0)v(0) = 0$ per ogni $v \in W^{1,2}(I)$ e quindi $\bar{u}'(1) = \bar{u}'(0) = 0$.

Diamo qualche esempio di applicazione dei risultati dimostrati nel capitolo precedente.

Esempio 6.1 Consideriamo il funzionale

$$J(v) = v^2(0) + \int_0^1 (v'^2 + 4fv) dx$$

con $f \in L^2$, Il funzionale J è definito in $W^{1,2}(I)$. Proviamo che esiste un unico punto di minimo nel convesso chiuso di $W^{1,2}(I)$, definito da

$$K = \{v \in W^{1,2}(I) : v(1) = A\}$$

Consideriamo la forma bilineare in $W^{1,2}(I)$:

$$a(u, v) = 2u(0)v(0) + 2 \int_0^1 u'v' dx$$

ed il funzionale lineare e continuo $F(v) = -4 \int_0^1 fv dx$.

Osserviamo che dai teoremi di immersione a è continua in $W^{1,2}(I)$ ed inoltre dalla disuguaglianza di Poincarè per $v, u \in K$ segue:

$$a(u - v, u - v) = 2(u(0) - v(0))^2 + 2 \int_0^1 (u' - v')^2 dx \geq C \|u - v\|_{W^{1,2}}$$

Si vede facilmente che l'ultima condizione, più debole della coercività è tuttavia sufficiente per provare il teorema di Stampacchia 5.12, e quindi segue che esiste un unica $\bar{u} \in K$ tale che

$$a(\bar{u}, v - \bar{u}) \geq -4 \int_0^1 f(v - \bar{u}) dx$$

e dal momento che a è simmetrica $\bar{u}$ è anche minimo del funzionale J .

Esempio 6.2 Consideriamo la forma bilineare

$$a(u, v) = u(0)v(0) + \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx,$$

e sia K come nell'esempio precedente ma con $A = 0$. Osserviamo che in questo caso K è un sottospazio chiuso di $W^{1,2}(I)$.

La forma a è continua e coerciva in $W^{1,2}$ e quindi per ogni $f \in L^2$ esiste un unico $\bar{u} \in K$ tale che per ogni $v \in K$ $a(\bar{u}, v) = F(v)$ e cioè

$$\bar{u}(0)v(0) + \int_0^1 \bar{u}'v' dx + \int_0^1 \bar{u}v dx = \int_0^1 fv dx \quad (6.9.20)$$

In particolare, se prendiamo $v \in K \cap C_0^1$ si ha

$$\int_0^1 \bar{u}' v' dx + \int_0^1 \bar{u} v dx = \int_0^1 f v dx \quad (6.9.21)$$

da cui segue che la derivata debole di $\bar{u}'$ è $f - \bar{u}$ e di conseguenza $\bar{u} \in W^{2,2}(I)$. Quindi ragionando come prima si ha che quasi ovunque in I

$$-\bar{u}'' + \bar{u} - f = 0 \quad (6.9.22)$$

Da (6.9.20), integrando per parti per $v \in K$ ($v(1) = 0$) si ha:

$$\bar{u}(0)v(0) + \bar{u}'(1)v(1) - \bar{u}'(0)v(0) + \int_0^1 (\bar{u}'' + \bar{u} - f)v dx = 0 \quad (6.9.23)$$

da cui segue

$$-\bar{u}'(0)v(0) + \bar{u}(0)v(0) = 0 \implies \bar{u}'(0) = \bar{u}(0)$$

Si conclude che $\bar{u}$ è soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I = (0, 1) \\ u(1) = 0, \\ u(0) = u'(0). \end{cases} \quad (6.9.24)$$

Il problema (6.9.24) è relativo all'equilibrio di un filo elastico, la condizione $u(1) = 0$ esprime il fatto che il filo ha un estremo fissato mentre $u(0) = u'(0)$ dice che l'altro estremo è mobile.

Se $f \in C^0$ si prova che $\bar{u} \in C^2$ e quindi è anche una soluzione classica.

6.10 Procedimento dei Metodi Diretti

Diamo un'idea dell'applicazione dei Metodi Diretti per la ricerca del minimo di un funzionale integrale incontrata nel Capitolo 4 in (6.1.3) negli spazi di Sobolev e quindi della forma:

$$I(v) = \int_a^b f(x, v(x), v'(x)) dx = \int_a^b (|v'(x)|^p - h(x)v(x)) dx \quad (6.10.25)$$

con $p > 1$ e $h \in L^{\frac{p}{p-1}}$. Utilizzando la teoria delle topologie deboli e degli spazi di Sobolev proveremo che esiste il minimo di I nella classe di Sobolev $W_0^{1,p}((a, b))$, cioè esiste ed è unico $u \in W_0^{1,p}((a, b))$ tale che

$$m = \left\{ I(v) : v \in W_0^{1,p}((a, b)) \right\} = I(u).$$

Sia $v \in W_0^{1,p}((a, b))$, dalla disuguaglianza di Holder e dal fatto che per ogni $a, b > 0$ vale $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{p-1}{p}b^{\frac{p}{p-1}}$, si ha:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b h(x)v(x) dx \right| &\leq \left(\int_a^b |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \\ &\leq \epsilon \int_a^b |v(x)|^p dx + \frac{1}{\epsilon} \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \end{aligned}$$

e quindi

$$I(v) \geq \int_a^b |v'(x)|^p dx - \epsilon \int_a^b |v(x)|^p dx - C_\epsilon \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx.$$

Dalla Disuguaglianza di Poincarè, esiste c tale che

$$\int_a^b |v(x)|^p |v'(x)|^p dx \leq c \int_a^b |v'(x)|^p dx$$

scegliendo ϵ tale che $1 - \epsilon c > 0$, si ottiene:

$$I(v) \geq (1 - \epsilon c) \int_a^b |v'(x)|^p dx - C_\epsilon \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx \geq -C_\epsilon \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx$$

Segue quindi che I è inferiormente limitato e $m > -\infty$.

Sia $(u_k) \subset W_0^{1,p}((a, b))$ una successione minimizzante:

$$\lim_k I(u_k) = m,$$

e procedendo come prima si ha

$$I(u_k) \geq (1 - \epsilon c) \int_a^b |u'_k(x)|^p dx - C_\epsilon \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx,$$

da cui segue

$$\|u'_k\|_{L^p} \leq I(u_k) + \int_a^b |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}(x) dx,$$

e ancora dalla disuguaglianza di Poincarè segue che le norme della successione (u_k) in $W_0^{1,p}((a, b))$ sono equilimitate e quindi esiste una successione estratta, che continuiamo a denotare con (u_k) , che converge nella topologia debole di $W_0^{1,p}((a, b))$ ad una funzione u .

Dal momento che (u_k) converge debolmente a u in L^p , si ha

$$\lim_k \int_a^b u_k(x)h(x) dx = \int_a^b u(x)h(x) dx. \quad (6.10.26)$$

Da altra parte per la convessità della funzione $g(\zeta) = |\zeta|^p$, $\zeta \in R$ per ogni ζ, η si ha:

$$|\zeta|^p - |\eta|^p \geq p|\eta|^{p-2}\eta(\zeta - \eta)$$

da cui segue

$$\int_a^b (|u'_k(x)|^p - |u'(x)|^p) dx \geq \int_a^b p |u'|^{p-2} u' (u'_k(x) - u'(x)) dx$$

e quindi poiché $|u'|^{p-2}u' \in L^{\frac{p}{p-1}}((a, b))$ e $u'_k - u'$ converge debolmente a 0 in $L^p((a, b))$,

$$\lim_k \int_a^b |u'|^{p-2} u' (u'_k(x) - u'(x)) dx = 0$$

e segue

$$\liminf_k \int_a^b |u'_k(x)|^p dx \geq \int_a^b |u'(x)|^p dx \quad (6.10.27)$$

Mettendo insieme (6.10.26) e (6.10.27) si ottiene

$$I(u) \leq \liminf_k I(u_k) = m, \quad (6.10.28)$$

allora $I(u) = m$ e quindi u è un minimo del funzionale.

La relazione (6.10.28) dice che il funzionale I è sequenzialmente inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza debole in $W_0^{1,p}((a, b))$.

Proviamo che u è l'unico minimo. Supponiamo che esista $v \in W_0^{1,p}((a, b))$ tale che:

$$I(u) = I(v) = m,$$

Notiamo che $w = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ è una funzione in $W_0^{1,p}((a, b))$ e poiché la funzione integranda del funzionale I , $f(x, s, \zeta) = \zeta^p - h(x)s$ è strettamente convessa nella variabile ζ , segue che

$$m \leq I(w) \leq \frac{1}{2}I(u) + \frac{1}{2}I(v) = m,$$

e dunque w è ancora un minimo e quindi per quasi ogni $x \in (a, b)$ vale:

$$\frac{1}{2}|u'|^p + \frac{1}{2}|v'|^p = |w'|^p = \left| \frac{u' + v'}{2} \right|^p.$$

L'ultima uguaglianza per la stretta convessità della funzione $g(\zeta) = |\zeta|^p$, implica che $v' = u'$ quasi ovunque e quindi poiché sono funzioni di classe $W_0^{1,p}((a, b))$ si ha che $u - v$ è costante quasi ovunque, ma dal momento che la costante è nulla sulla frontiera segue che $u = v$ quasi ovunque in (a, b) .

6.11 Risultato di regolarità

In questa sezione stabiliamo un risultato di regolarità per un'equazione non lineare utilizzando le proprietà degli spazi di Sobolev ed in particolare il teorema 6.2.

TEOREMA 6.14. *–Data la seguente equazione differenziale in un intervallo aperto (a, b) di R :*

$$\frac{d}{dx}a(x, u(x), u'(x)) = b(x, u(x), u'(x)) \quad (6.11.29)$$

con $a(x, s, \zeta), b(x, s, \zeta)$ funzioni di classe $C^\infty((a, b) \times R \times R)$ soddisfacenti le seguenti condizioni di crescita:

- (H_1) *Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni (x, s, ζ) si ha:*

$$|a(x, s, \zeta)| \leq \gamma(1 + |\zeta|^p),$$

$$|b(x, s, \zeta)| \leq \gamma(1 + |\zeta|^p).$$

- (H_2) *Uniformemente rispetto a (x, s) :*

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} a(x, s, \zeta) = +\infty.$$

- (H_3) *Esiste $\alpha > 0$ tale che per ogni (x, s, ζ) si ha:*

$$a_\zeta(x, s, \zeta) \geq \alpha > 0.$$

Sia $u \in W^{1,p}((a, b))$ una soluzione debole dell'equazione (6.11.29) e cioè per ogni $\varphi \in C^\infty$:

$$\int_a^b a(x, u(x), u'(x)) \varphi'(x) dx + \int_a^b b(x, u(x), u'(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad (6.11.30)$$

allora u è di classe $C^\infty((a, b))$.

Dimostrazione. Sia $u \in W^{1,p}((a, b))$ una soluzione debole di (6.11.29), dalla condizione di crescita (H_1) segue che $a(x, u(x), u'(x))$ e $b(x, u(x), u'(x))$ sono funzioni di classe L^1 in (a, b) .

Definiamo

$$v(x) = a(x, u(x), u'(x)), \quad w(x) = b(x, u(x), u'(x)),$$

da (6.11.30) segue che w è la derivata debole di v , $v' = w$.

Dal momento che $w \in L^1((a, b))$ si ha che $v \in W^{1,1}$ e quindi v è continua e limitata in (a, b) , in particolare esiste una costante $c > 0$ tale che $|v(x)| = |a(x, u(x), u'(x))| \leq C$ per quasi ogni $x \in (a, b)$.

Dalla condizione (H_2) segue che u' deve essere limitata e quindi $u \in W^{1,\infty}$.

Proviamo ora che $u' \in W^{1,\infty}$ ed in particolare che u' soddisfa l'ultima condizione del Teorema 6.2 e cioè che per ogni $I_0 \subset \bar{I}_0 \subset (a, b)$ e $h \in R$ con $h < \text{dist}(I_0, R - I)$ esiste una costante $c > 0$ tale che per quasi ogni $x \in I_0$:

$$|u'(x+h) - u'(x)| \leq c|h|.$$

Infatti da (H_3) segue che

$$\alpha(u'(x+h) - u'(x)) \leq \int_{u'(x)}^{u'(x+h)} a_\zeta(x, u(x), \zeta) d\zeta,$$

e quindi

$$\alpha|u'(x+h) - u'(x)| \leq |a(x, u(x), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))|,$$

che implica:

$$\begin{aligned} \alpha|u'(x+h) - u'(x)| &\leq |a(x, u(x), u'(x+h)) - a(x+h, u(x+h), u'(x+h))| + \\ &\quad |a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))|. \end{aligned}$$

Dal momento che $u \in W^{1,\infty}$ segue che

$$b(x, u(x), u'(x)) \in L^\infty \implies a(x, u(x), u'(x)) \in W^{1,\infty}$$

applicando alla funzione $a(x, u(x), u'(x))$ la caratterizzazione del Teorema 6.2, segue che

$$|a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))| \leq c_1|h|$$

Inoltre dal fatto che $a(x, s, \zeta) \in C^\infty$ si ha che è anche Lipschiziana nelle x e s quando variano in un insieme limitato di $I \times R$ e quindi esiste una costante L

$$|a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x+h))| \leq L(|h| + |u(x+h) - u(x)|) \leq c_2|h|,$$

dove l'ultima disuguaglianza si ottiene applicando alla funzione u la condizione del Teorema 6.2

Si ha quindi che $u' \in W^{1,\infty} \implies u \in W^{2,\infty}$.

Derivando il primo membro dell'equazione

$$\frac{d}{dx}a(x, u(x), u'(x)) = b(x, u(x), u'(x)). \quad (6.11.31)$$

si ottiene:

$$\frac{d}{dx}(a(x, u(x), u'(x))) = a_x(x, u(x), u'(x)) + u' a_s(x, u(x), u'(x)) + u'' a_\zeta(x, u(x), u'(x))$$

e dividendo per $a_\zeta(x, u(x), u'(x)) \neq 0$ l'equazione (6.11.31) diventa

$$u'' = \frac{b(x, u(x), u'(x)) - a_x(x, u(x), u'(x)) - u' a_s(x, u(x), u'(x))}{a_\zeta(x, u(x), u'(x))}. \quad (6.11.32)$$

Poiché $u \in W^{2,\infty}$ si ha che u' è una funzione continua e quindi il secondo membro di (6.11.32) è continuo, allora u'' è una funzione continua e quindi $u \in C^2$.

Ritornando alla (6.11.32) segue che $u'' \in C^1$ e quindi $u \in C^3$ e così di seguito si prova che $u \in C^\infty$.

Capitolo 7

Spazi di Sobolev in R^n

7.1 Spazi di Sobolev in R^n

In questa sezione studiamo gli spazi di Sobolev n -dimensionale. Nel seguito Ω denota un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 7.1. *–Diremo che Ω è un aperto di classe C^m , se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x_0 ed un'applicazione biettiva $H : B \rightarrow U$, dove B è la sfera n -dimensionale di centro 0 e raggio 1, soddisfacente alle seguenti condizioni:*

(1)

$$H \in C^m(\bar{B}) \quad e \quad H^{-1} \in C^m(\bar{U})$$

(2)

$$H(B_+) = U \cap \Omega \quad e \quad H(B_0) = U \cap \partial\Omega$$

dove $B_+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ e $B_0 = \{x \in B : x_n = 0\}$.

Se $\Omega \in C^1$ allora per ogni x_0 esiste una unica normale esterna $\nu(x_0)$.

Vale il seguente **teorema di Gauss-Green o della divergenza**:

TEOREMA 7.1. *–Sia $\Omega \in C^1$ e $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ allora*

$$\int_{\Omega} u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_i d\sigma$$

In particolare se $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$ è un campo vettoriale definito in Ω di classe $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ allora vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_{x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n F_i \nu_i \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F}, \nu) \, d\sigma$$

Applicando la relazione precedente al prodotto uv , con $u, v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ si ha la **Formula di integrazione per parti**

$$\int_{\Omega} v u_{x_i} \, dx = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i \, d\sigma - \int_{\Omega} u v_{x_i} \, dx$$

Se $u \in C^1(\Omega)$, allora per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} \, dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi \, dx.$$

Diamo la definizione di derivata rispetto all' i -sima variabile:

DEFINIZIONE 7.2. — *Una funzione $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ha derivata prima debole se esistono n funzioni $(v_1, \dots, v_n)$ appartenenti a $L_{loc}^1(\Omega)$ tali che:*

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} \, dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall i = 1, \dots, n$$

Utilizzando il Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si ha che se la derivata debole esiste è unica. $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ rappresenta il gradiente debole di u

Osserviamo che tutte le regole di derivazione usuali si generalizzano al caso delle derivate deboli. Le derivate di ordine superiore si definiscono in modo analogo.

Si definisce quindi lo spazio di Sobolev in Ω :

DEFINIZIONE 7.3. — *Per $1 \leq p \leq +\infty$, denotiamo con $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tale che le derivate parziali prime deboli u_{x_i} appartengono a $L^p(\Omega)$.*

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è di Banach con la seguente norma:

$$\|u\|_{1,p} = \left\{ |u|^p + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u_{x_i}|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty \quad (7.1.1)$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{\infty} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\infty} \quad (7.1.2)$$

Se $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ e $u_{x_i} \in L^p(\Omega)$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e le derivate parziali nel senso usale coincidono con le derivate deboli. Se Ω è

limitato allora $C^1 \subset W^{1,p}$. Inversamente se $u \in W^{1,p} \cap C^0$ e $u_{x_i} \in C^0$ allora $u \in C^1$.

Valgono le seguenti proprietà, analoghe al caso unidimensionale:

- Se $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile;
- $1 < p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio riflessivo;
- Per $p = 2$, $W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dx + \sum_1^n \int_{\Omega} u_{x_i} v_{x_i} dx$$

Osserviamo che se Ω è limitato allora:

$$C^1(\bar{\Omega}) \subsetneq W^{1,\infty}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$$

OSSERVAZIONE 7.1. – *Indichiamo con $C^{1,p}(\Omega)$ la classe delle funzioni in C^1 tali che la norma (7.1.1) risulti finita cioè $C^{1,p}(\Omega) = C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$. Vale che: per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione di funzioni $u_j \in C^{1,p}(\Omega)$ che converge ad u nella norma (7.1.1). (Teorema di Meyers-Serrin, 1964, per la dimostrazione rimandiamo a Giusti). La definizione di spazio di Sobolev era negli anni 50 differente dalla definizione appena data, si utilizzava la notazione $H^{1,p}$ che indicava il completamento delle funzioni C^1 nella norma (7.1.1). Il risultato di Meyers-Serrin prova che $H^{1,p} = W^{1,p}$ e di fatto eliminava una considerevole confusione nella teoria degli spazi di Sobolev e in particolare sulle relazioni tra $H^{1,p}$ e $W^{1,p}$.*

OSSERVAZIONE 7.2. – *Abbiamo visto che nel caso unidimensionale le funzioni $u \in W^{1,p}(I)$ sono di fatto le primitive delle funzioni $L^p(I)$ ed inoltre sono quasi ovunque uguale ad una funzione continua. Nel caso $n > 1$ una funzione può appartenere ad uno spazio di Sobolev ed essere discontinua e non limitata.*

Consideriamo $\Omega = B(0, 1)$ la sfera di centro 0 e raggio 1 di R^n e sia $u(x) = |x|^{-\alpha}$, with $\alpha > 0$. Osserviamo che u è regolare per $x \neq 0$

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$

e quindi per $x \neq 0$ si ha

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Sia $\varphi \in C_0^\infty(B)$ e fissiamo $\epsilon > 0$, allora

$$\int_{B(0,1)-B(0,\epsilon)} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{B(0,1)-B(0,\epsilon)} u_{x_i} \varphi dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u \varphi \nu_i d\sigma,$$

dove ν denota la normale esterna su $\partial B(0,\epsilon)$.

Da altra parte:

$$\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} u \varphi \nu_i d\sigma \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-\alpha} d\sigma \leq C \epsilon^{n-1-\alpha},$$

quindi se $\alpha < n-1$ per $\epsilon \rightarrow 0$ segue:

$$\int_{B(0,1)} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{B(0,1)} u_{x_i} \varphi dx,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B)$, quindi per $\alpha < n-1$ u_{x_i} è la derivata debole di u . Inoltre $Du(x)$ è sommabile L^p se e solo se $(\alpha+1)p < n$. Dal momento che $\frac{n-p}{p} < n-1$ si può concludere che $u \in W^{1,p}(B)$ se e solo se $0 < \alpha < \frac{n-p}{p}$. Inoltre $u \notin W^{1,p}(B)$ per ogni $p \geq n$.

Diamo ora la definizione dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$:

DEFINIZIONE 7.4. — *La chiusura di $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma (7.1.1) di $W^{1,p}(\Omega)$ si denota con $W_0^{1,p}(\Omega)$ ed è uno spazio di Banach munito della norma di $W^{1,p}(\Omega)$. In altre parole una funzione u appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione di funzioni $u_k \in C_0^\infty$ tale che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{1,p} = 0.$$

Le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono in qualche senso le funzioni che si annullano sulla frontiera di Ω , anche se è estremamente delicato precisare questa affermazione dal momento che le funzioni che appartengono agli spazi di Sobolev sono quasi ovunque definite. Osserviamo che se Ω è sufficientemente regolare si può dare un significato alla restrizione di u sulla frontiera di Ω facendo ricorso alla teoria delle tracce negli spazi di Sobolev.

Tuttavia si hanno i seguenti risultati che stabiliscono una caratterizzazione delle funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ (Brezis, Lemma IX.5, teorema IX.17)

TEOREMA 7.2. — *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con supporto compatto contenuto in Ω . Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

TEOREMA 7.3. — *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e supponiamo che Ω abbia frontiera di classe C^1 , allora le seguenti proprietà sono equivalenti*

- $u = 0$ su $\partial\Omega$,
- $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

7.2 Teoremi di immersione

Come nel caso unidimensionale, in $W^{1,p}(\Omega)$ si possono provare alcuni teoremi di immersione continua e compatta, tuttavia prima di enunciarli diamo una motivazione dei risultati. Supponiamo di voler stabilire una maggiorazione della forma:

$$\|u\|_q \leq C \|Du\|_p, \quad (7.2.3)$$

si ha che l'esponente q deve avere un particolare legame con p e n .

Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$, $u \neq 0$, per $\lambda > 0$ definiamo:

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x),$$

e applichiamo la maggiorazione a u_λ , si ottiene:

$$\left(\int_{R^n} |u_\lambda(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{R^n} |Du_\lambda(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{R^n} |u_\lambda(x)|^q dx &= \int_{R^n} |u(\lambda x)|^q dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{R^n} |u(y)|^q dy, \\ \int_{R^n} |Du_\lambda(x)|^p dx &= \lambda^p \int_{R^n} |Du(\lambda x)|^p dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int_{R^n} |Du(y)|^p dy, \end{aligned}$$

allora si ha

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \|u\|_q \leq C \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \|Du\|_p,$$

o in modo equivalente

$$\|u\|_q \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|Du\|_p,$$

ne segue che se $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$ mandando λ a 0 e all'infinito si ottiene una contraddizione.

Segue che la maggiorazione (7.2.3) è possibile solo se

$$1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0 \implies q = \frac{np}{n-p}.$$

Per $1 \leq p < n$, si chiama **esponente coniugato di Sobolev**, il numero p^* definito da

$$p^* = \frac{np}{n-p} > p.$$

Nello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ vale il seguente risultato di immersione:

TEOREMA 7.4. *— Sia Ω limitato ed $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, allora*

- Se $p < n$, si ha che $u \in L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{np}{n-p}$ e

$$\|u\|_{p^*} \leq c(n, p) \|Du\|_p \quad (7.2.4)$$

- Se $p > n$ si ha che $u \in C^{0, \alpha}(\Omega)$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ e

$$\|u\|_{o, \alpha} = \|u\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|^{\alpha}}{|x - y|} \leq c_2(n, p) \|Du\|_p$$

$$\|u\|_{\infty} \leq c_2(n, p) (\text{diam } \Omega)^{\alpha} \|Du\|_p$$

Dal teorema precedente, per ogni $p > 1$, segue la **Disuguaglianza di Poincarè**:

TEOREMA 7.5. — **Sia Ω limitato e $u \in W_0^{1, p}(\Omega)$, allora**

$$\|u\|_p \leq c_3(n, p) |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|Du\|_p$$

Dimostrazione. Distinguiamo due casi $1 \leq p < \frac{n}{n-1}$ e $p \geq \frac{n}{n-1}$. Nel primo caso dalla disuguaglianza di Holder con esponenti $\frac{p^*}{p}$ e $\frac{p^*-p}{p^*}$:

$$\|u\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}} \|u\|_{p^*} \leq |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|Du\|_p$$

mentre nel secondo caso, consideriamo $q > 1$ tale che $q^* = p$ e quindi posto $q = \frac{np}{n+p}$ (osserviamo che $q > 1$ se $p \geq \frac{n}{n-1}$ e quindi:

$$\|u\|_p \leq C \|Du\|_{p^*} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|Du\|_p.$$

La disuguaglianza precedente assicura che in $W_0^{1, p}(\Omega)$, la norma di $W^{1, p}$ è equivalente alla norma in L^p del solo gradiente.

Proviamo attraverso un esempio che per stabilire risultati di immersione negli spazi $W^{1, p}(\Omega)$ si deve richiedere una certa regolarità della frontiera di Ω .

Esempio 7.1 Consideriamo il sottoinsieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definito da:

$$\Omega = \left\{ (x, y) : x \in (0, 1), \quad |y| \leq \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \right\},$$

proviamo che la funzione in Ω data da $u(x, y) = x^3 \exp(\frac{1}{x^2})$, appartiene a $W^{1, 1}(\Omega)$ ma $u \notin L^p$ per nessun $p > 1$. Per $p > 1$, si ha:

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^p dx dy = \int_0^1 \int_{-\exp(-\frac{1}{x^2})}^{\exp(-\frac{1}{x^2})} x^{3p} \exp\left(\frac{p}{x^2}\right) dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x^{3p} \exp\left(\frac{p}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = 2 \int_0^1 x^{3p} \exp\left(\frac{p-1}{x^2}\right) dx = +\infty,$$

e quindi $u \in L^1(\Omega)$ ma $u \notin L^p$ per $p > 1$.

Da altra parte, poiché $u_x = \exp(\frac{1}{x^2})(3x^2 - 2)$ e $u_y = 0$, si ha:

$$\int_{\Omega} |Du| dx dy = \int_0^1 dx \int_{-\exp(-\frac{1}{x^2})}^{\exp(-\frac{1}{x^2})} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) |3x^2 - 2| dy = 2 \int_0^1 |3x^2 - 2| dx < +\infty.$$

Si ha il seguente teorema di immersione per gli spazi $W^{1,p}(\Omega)$:

TEOREMA 7.6. — *Sia Ω un aperto limitato con frontiera Lipschitziana e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora:*

- Se $1 \leq p < n$, si ha che $u \in L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{np}{n-p}$ e

$$\|u\|_{p^*} \leq c \|u\|_{1,p}$$

- Se $p > n$ si ha che $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$ e

$$\|u\|_{0,\alpha} \leq c_2(n,p) \|u\|_{1,p}$$

Inoltre vale il seguente teorema di immersione compatta di Rellich.

TEOREMA 7.7. — *Supponiamo che Ω sia un aperto con frontiera Lipschitziana e sia $1 \leq p < n$ e $1 \leq q < p^*$, l'immersione*

$$W^{1,p} \subset L^q(\Omega) \text{ è compatta.}$$

In particolare $W^{1,p}$ è immerso con compattezza in $L^p(\Omega)$ e quindi ogni successione limitata nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$ ha un estratta che converge rispetto alla convergenza forte di $L^p(\Omega)$.

Per le funzioni di classe $W^{1,p}(\Omega)$ vale la seguente disuguaglianza detta di *Wirtinger-Poincaré*:

TEOREMA 7.8. — *Sia $\Omega \subset R^n$ connesso e limitato con frontiera Lipschitziana. Esiste una costante $C = C(\Omega, p, n)$, tale che*

$$\int_{\Omega} |u(x) - u_{\Omega}|^p dx \leq C(\Omega, p, n) \int_{\Omega} |Du(x)|^p dx \quad (7.2.5)$$

dove u_{Ω} denota la media della funzione u in Ω , $u_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che la media di u su Ω è nulla.

Supponiamo che (7.2.5) non sia vera, allora esiste $v_j \in W^{1,p}(\Omega)$ con $v_{j,\Omega} = 0$ tale che

$$\int_{\Omega} |Dv_j|^p dx \leq \frac{1}{j} \int_{\Omega} |v_j|^p dx,$$

allora definendo $u_j = \frac{v_j}{\|v_j\|_p}$ si ha

$$\int_{\Omega} |u_j|^p dx = 1, \quad \int_{\Omega} |Du_j|^p dx \leq \frac{1}{j}.$$

Dal teorema di immersione compatta esiste una successione estratta da u_j , u_{j_k} che converge in L^p ad una funzione u tale che $\|u\|_p = 1$ e $u_{\Omega} = 0$.

Da altra parte, poiché $\|Du_{j_k}\|^p \leq \frac{1}{j_k}$, $\|Du_j\|_p \rightarrow 0$:

$$\int_{\Omega} \phi_{x_i} u dx = \int_{\Omega} \lim_k \phi_{x_i} u_{j_k} dx = - \lim_k \int_{\Omega} \phi D_{x_i} u_{j_k} dx = 0 = - \int_{\Omega} \phi D_{x_i} u dx$$

quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $Du = 0$. Poiché Ω è convesso si deve avere che u è costante. Infatti passando alle regolarizzate di u_{ϵ} hanno gradiente nullo nel convesso Ω e quindi sono costanti insieme alla u che è il loro limite. Tale conclusione è assurda dal momento che $\|u\|_p = 1$.

7.3 Convergenza debole in $W^{1,p}$

In $W^{1,p}(\Omega)$ si definisce la topologia *debole*, che definiremo solo attraverso la convergenza delle successioni di funzioni.

DEFINIZIONE 7.5. — *Una successione (u_h) in $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, converge debolmente a $u \in W^{1,p}(\Omega)$, e si denota $u_h \rightharpoonup u$, se per ogni $v \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha*

$$\lim_h \int_{\Omega} u_h v dx = \int_{\Omega} u v dx \iff u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega);$$

$$\lim_h \int_{\Omega} (u_h)_{x_i} v dx = \int_{\Omega} u_{x_i} v dx \iff (u_h)_{x_i} \rightharpoonup u_{x_i} \text{ in } L^p(\Omega)$$

Una successione (u_h) in $W^{1,1}(\Omega)$, converge debolmente a $u \in W^{1,1}(\Omega)$, se per ogni $v \in L^{\infty}(\Omega)$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha

$$\lim_h \int_{\Omega} u_h v dx = \int_{\Omega} u v dx \iff u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^1(\Omega);$$

$$\lim_h \int_{\Omega} (u_h)_{x_i} v dx = \int_{\Omega} u_{x_i} v dx \iff (u_h)_{x_i} \rightharpoonup u_{x_i} \text{ in } L^1(\Omega)$$

Quando $p > 1$, la convergenza debole e la topologia forte sono legati dal seguente risultato, dovuto al fatto che $W^{1,p}$ è uno spazio riflessivo.

TEOREMA 7.9. – *Data (u_h) una successione di elementi di $W^{1,p}$, $p > 1$, tale che $\|u_h\|_{1,p} \leq M$, allora esiste un'estratta che converge nella topologia debole in $W^{1,p}(\Omega)$ a una funzione u .*

OSSERVAZIONE 7.3. – *Dal teorema di immersione compatta segue che ogni successione $u_j \subset W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, che converge debolmente a u , converge nella topologia forte di $L^q(\Omega)$, per ogni q tale che $1 < q < p^* = \frac{np}{n-p}$. Infatti, la successione u_j è limitata nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi relativamente compatta in $L^q(\Omega)$. Esiste dunque una sottosuccessione che converge a u nella topologia forte di $L^q(\Omega)$. Questo procedimento si può fare su ogni sottosuccessione di u_j , che ammette sempre un'estratta che converge ad u nella norma di $L^q(\Omega)$, allora si ha che tutta la successione converge a u in $L^q(\Omega)$.*

7.4 Formulazione variazionale di problemi ellittici

- **Problema di Dirichlet omogeneo**

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e f una funzione assegnata: Consideriamo il seguente problema al contorno:

Determinare $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} -\Delta u + u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4.6)$$

Una soluzione classica è una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ che verifica (7.4.6) per ogni $x \in \Omega$.

DEFINIZIONE 7.6. – *Diremo che $\bar{u}$ è una soluzione debole di (7.4.6) se $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega} D\bar{u} Dv dx + \int_{\Omega} \bar{u} v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (7.4.7)$$

Osserviamo che se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ si deve precisare cosa si intende per valore sulla frontiera di Ω .

Ogni soluzione classica u è anche una soluzione debole. Infatti, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, moltiplicando l'equazione in (7.4.6) per una funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, integrando per parti:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i x_i} \varphi = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi_{x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \varphi \nu_i d\sigma,$$

e quindi poiché $\varphi = 0$ sulla frontiera di Ω , si ottiene:

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi dx = - \int_{\Omega} Du D\varphi dx,$$

e quindi vale (7.4.7) e per densità la stessa uguaglianza vale per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

TEOREMA 7.10. *—Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ soluzione debole di (7.4.6) che, per il Principio di Dirichlet astratto risulta essere anche minimo in $W_0^{1,2}(\Omega)$ del funzionale:*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|Dv|^2 + |v|^2) dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Dimostrazione. Tenendo conto del prodotto scalare in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$(u, v) = \int_{\Omega} Du Dv dx + \int_{\Omega} u v dx,$$

dal teorema di rappresentazione dei funzionali negli spazi di Hilbert, considerato il funzionale $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$, si ha che esiste un'unica $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $(\bar{u}, v) = F(v)$.

Lo studio della regolarità della soluzione debole è molto più delicato che nel caso $n = 1$ tuttavia quando $\bar{u} \in C^2$ allora si prova che $\bar{u}$ è anche una soluzione classica.

- **Problema al contorno non omogeneo**

Consideriamo il problema al contorno **non omogeneo** della forma

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4.8)$$

In questo caso bisogna dare alcune condizioni sul dato al bordo g . Supponiamo che esista $\tilde{g} \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che $\tilde{g} = g$ sulla frontiera di Ω e definiamo il convesso chiuso non vuoto di $W^{1,2}(\Omega)$

$$K = \left\{ v \in W^{1,2}(\Omega) : v - \tilde{g} \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

La definizione di K è indipendente dalla funzione $\tilde{g} = g$ che si considera. Infatti se $h \in W^{1,2}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ ed inoltre $h = \tilde{g}$ sulla frontiera di Ω si ha che $v - h = v - \tilde{g} + \tilde{g} - h$ e quindi $v - h \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

DEFINIZIONE 7.7. *—Diremo che $\bar{u}$ è una soluzione debole di (7.4.8) se $\bar{u} \in K$ tale che*

$$\int_{\Omega} D\bar{u} Dv dx + \int_{\Omega} \bar{u} v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (7.4.9)$$

Ogni soluzione classica è anche una soluzione debole.

TEOREMA 7.11. *—Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $\bar{u} \in K$ soluzione debole di (7.4.8) che, per il Principio di Dirichlet astratto risulta essere minimo nell'insieme convesso K del funzionale:*

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|Dv|^2 + |v|^2) dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\bar{u} \in K$ è una soluzione debole se e solo se

$$\int_{\Omega} D\bar{u}(Dv - D\bar{u}) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(v - \bar{u}) dx \geq \int_{\Omega} f(v - \bar{u}) dx, \quad v \in K. \quad (7.4.10)$$

Sia $\bar{u}$ è una soluzione debole poiché $v - \bar{g}$ e $\bar{u} - \bar{g}$ appartengono a $W_0^{1,2}(\Omega)$ anche $v - \bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, in particolare in (7.4.10) vale l'uguaglianza:

$$\int_{\Omega} D\bar{u}(Dv - D\bar{u}) dx + \int_{\Omega} \bar{u}(v - \bar{u}) dx = \int_{\Omega} f(v - \bar{u}) dx.$$

Viceversa se $\bar{u}$ soddisfa (7.4.10), scegliendo $v = \bar{u} + w$ e $v = \bar{u} - w$ con $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$ segue che $\bar{u}$ è una soluzione debole.

Dal teorema di Stampacchia 5.12 applicato allo spazio di Hilbert $W_0^{1,2}(\Omega)$ e al convesso K segue che esiste un'unica $\bar{u} \in K$ soddisfacente (7.4.10), quindi $\bar{u}$ è l'unica soluzione debole di (7.4.8).

- **Alcune generalizzazioni a problemi ellittici lineari**

Consideriamo $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq n$ e supponiamo che soddisfino la seguente condizione di **ellitticità**:

– Esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\sum_{ij} a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha |\lambda|^2 \quad x \in \Omega \quad \lambda \in R^n$$

Consideriamo il problema in Ω :

$$\begin{cases} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + a_0(x) u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4.11)$$

con $a_0 \in C^0(\bar{\Omega})$. Una soluzione classica è una funzione che soddisfa (7.4.11) in ogni punto di Ω .

DEFINIZIONE 7.8. **-Diremo che u è una soluzione debole se $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che**

$$\int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) u \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

per ogni $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Una soluzione classica è anche una soluzione debole.

Assumiamo $a_0(x) \geq 0$ in Ω e consideriamo la forma bilineare continua in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) u v dx$$

Dall'ipotesi di ellitticità e dalla disuguaglianza di Poincaré segue che a è coerciva, infatti

$$\begin{aligned} a(v, v) &\geq \int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) v v dx \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} |Dv|^2 dx \geq \alpha \|v\|_{W^{1,2}}^2 \end{aligned}$$

Dal Teorema di Lax-Milgram segue quindi che per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $\bar{u}$ soluzione debole di (7.4.11). Se la matrice a_{ij} è simmetrica allora la forma bilineare è simmetrica e quindi $\bar{u}$ è anche minimo del funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{ij} a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0(x) v dx - \int_{\Omega} f v dx.$$

- **Problema di Neumann omogeneo**

Consideriamo il problema su un aperto $\Omega \in C^1$:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = f, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = (Du, \nu) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.4.12)$$

con $f \in L^2(\Omega)$. la condizione su $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ prende il nome di condizione al bordo di Neumann omogenea.

Una soluzione classica è una funzione $u \in C^2(\Omega)$ che verifica (7.4.12). Una soluzione debole è una funzione $u \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che per ogni $v \in W^{1,2}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Una soluzione classica é anche una soluzione debole. Infatti:

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (u_{x_i})_{x_i} v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \nu_i v \, d\sigma - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} v_{x_i} \, dx$$

e quindi, dal momento che $(Du, \nu) = 0$, per ogni $v \in W^{1,2}(\Omega)$

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} v_{x_i} \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Dal teorema di Lax-Milgram esiste una sola soluzione debole $\bar{u}$ che é anche minimo del funzionale:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Dv|^2 \, dx + \int_{\Omega} v^2 \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx,$$

nella classe della funzioni $W^{1,2}(\Omega)$.

7.5 Risoluzione del problema modello con il metodo di Galerkin

In questa sezione di risolvere il problema

$$-\Delta u = f(x), \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

nella sua formulazione variazionale:

$$\int_{\Omega} Du Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega), \quad (7.5.13)$$

with $f \in L^2(\Omega)$.

Dal momento che $W_0^{1,2}(\Omega)$ é uno spazio di Hilbert separabile esiste una successione (v_i) , $i \in N$, con $v_i \in W_0^{1,2}(\Omega)$, tale che le combinazioni lineari di elementi finiti di v_i sono dense in $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Denotiamo con $V_n = \text{span}(v_0, v_1, \dots, v_n)$, lo spazio vettoriale dei primi $n+1$ vettori. Per ogni $i \in N$, consideriamo il problema variazionale in V_i :

$$\int_{\Omega} Du Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in V_i, \quad (7.5.14)$$

che ammette una sola soluzione in V_i . La forma bilineare

$$a(v, u) = \int_{\Omega} Du Dv \, dx$$

é lineare e coerciva e definendo il funzionale lineare e continuo

$$F(u) = \int_{\Omega} f v \, dx,$$

ed é quindi possibile applicare il teorema di Lax-Milgram e quindi esiste un unico $\bar{u}_i \in V_i$ tale che:

$$\int_{\Omega} D\bar{u}_i Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad v \in V_i.$$

Proviamo che la successione $\bar{u}_i$ é limitata in norma' infatti dalla precedente relazione per $v = \bar{u}_i$ si ha

$$a(\bar{u}_i, \bar{u}_i) = \int_{\Omega} |D\bar{u}_i|^2 \, dx = \int_{\Omega} f \bar{u}_i \, dx \leq \|f\|_{L^2} \|\bar{u}_i\|_{L^2}$$

e quindi, per la disuguaglianza di Poincaré si ha

$$\|D\bar{u}_i\|_{L^2}^2 \leq a(\bar{u}_i, \bar{u}_i) \leq C \|f\|_{L^2} \|D\bar{u}_i\|_{L^2}.$$

La successione $\bar{u}_i$ ha quindi un estratta, che continuiamo ad indicare con $\bar{u}_i$, che converge nella topologia debole in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ad una funzione $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e nella topologia forte in $L^2(\Omega)$.

Fissiamo $j \in N$. Sia $v_j \in V_j$ e poiché la successione V_i é crescente si ha che $v_j \in V_i$ per ogni $i \geq j$. Di conseguenza, per ogni $i \geq j$ possiamo applicare (7.5.14), con la funzione test v_j :

$$\int_{\Omega} D\bar{u}_i Dv_j \, dx = \int_{\Omega} f v_j \, dx.$$

Da altra parte, poiché ∇u_j converge a $\nabla \bar{u}$ si ha

$$\int_{\Omega} D\bar{u}_i Dv_j \, dx \rightarrow \int_{\Omega} D\bar{u} Dv_j \, dx$$

e quindi

$$\int_{\Omega} D\bar{u} Dv_j \, dx = \int_{\Omega} f v_j \, dx.$$

dal momento che l'ultima equazione é lineare, rimane vera per ogni funzione v combinazione lineare finita delle v_j

$$\int_{\Omega} D\bar{u} Dv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v$$

e dal momento che $\bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$ é denso in $W_0^{1,2}(\Omega)$, si conclude che $\bar{u}$ é una soluzione del problema (7.5.13).

Capitolo 8

Teoremi di punto fisso

8.1 Breve storia dei Teoremi di punto fisso

La teoria dei punti fissi è uno dei più importanti strumenti della matematica. Dati un insieme X ed una funzione $T: X \rightarrow X$, si dice che un elemento x di X è un *punto fisso* per T se coincide con la sua immagine, ovvero se $x = T(x)$. Teoremi che stabiliscono l'esistenza e le proprietà di punti fissi sotto determinate ipotesi sono detti *teoremi di punto fisso* e costituiscono il nucleo di una teoria che è uno degli strumenti più potenti della matematica moderna. Infatti, i teoremi di punto fisso nascono da una affascinante combinazione di analisi, topologia e geometria e trovano applicazioni in quasi tutti i rami della matematica e, di conseguenza, anche in fisica, ingegneria, chimica, biologia, informatica ed economia. In questo capitolo diamo alcuni tra i più classici teoremi di punto fisso e presentiamo alcune applicazioni alla risoluzione di sistemi di equazioni algebriche lineari, equazioni integrali e equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

I primi passi nello sviluppo di questa teoria possono essere individuati nel lavoro di Henri Poincaré attorno al 1886 che si avvicinò alla questione partendo dallo studio delle curve algebriche. Il suo lavoro fu ripreso e leggermente migliorato negli anni successivi da altri matematici, tra i quali Piers Bohl e Luitzen Brouwer. In particolare, Brouwer intorno al 1912 sviluppò un metodo per affrontare il problema che permise di ottenere risultati in spazi di qualsiasi dimensione (purché finita) e, soprattutto, metteva in luce il ruolo della topologia algebrica che proprio grazie al lavoro di Poincaré si era sviluppata. Il risultato di Brouwer non è costruttivo, ovvero garantisce l'esistenza di un punto fisso ma non fornisce indicazioni su come determinarlo.

Negli anni successivi, il Teorema di Brouwer fu studiato, modificato ed esteso e ne furono fornite dimostrazioni di varia natura, ma si dovette attendere fino

al 1967 per avere, grazie al lavoro di Herbert Scarf, il primo algoritmo che calcolava approssimazioni successive del punto fisso in questione.

Il Teorema del punto fisso di Brouwer, afferma che una funzione continua da un sottoinsieme limitato, chiuso e convesso di $\mathbb{R}^n$ in se stesso ammette sempre almeno un punto fisso. Per visualizzare questo risultato, possiamo fare tre esempi, rispettivamente in dimensione 1, 2 e 3.

Per il caso unidimensionale possiamo pensare ad un monaco che una mattina, al sorgere del sole, inizi a camminare lungo uno stretto sentiero che conduce ad un monastero in cima ad una montagna e vi arrivi nel pomeriggio. Dopo alcuni giorni di preghiera e meditazione, il monaco ripercorre lo stesso sentiero per tornare da dove era venuto e parte alla stessa ora di quando aveva iniziato la salita. Nonostante abbia viaggiato a velocità non costante (mediamente maggiore in discesa che in salita) e abbia organizzato le pause in maniera diversa nei due viaggi, esiste un punto del sentiero per il quale il monaco è transitato alla stessa ora del giorno sia all'andata che al ritorno.

In due dimensioni possiamo pensare a due fogli di carta uguali appoggiati su un tavolo e perfettamente sovrapposti. Se prendiamo il foglio che sta sopra, lo accartocchiamo (senza strapparlo) e lo rimettiamo sopra al secondo foglio in modo tale che non sporga da esso, il Teorema del punto fisso di Brouwer ci permette di concludere che esiste almeno un punto del foglio accartocciato che è esattamente sulla stessa verticale di dove era prima.

Per il caso tridimensionale, invece, possiamo pensare ad una tazza di caffè (dalla forma sufficientemente convenzionale!). Comunque si mescoli il liquido al suo interno, a patto di non versarne fuori neanche un po', esiste sempre almeno una particella che è tornata esattamente dove era prima.

Vale inoltre la pena ricordare che il Teorema del punto fisso di Brouwer è stato generalizzato da Shizuo Kakutani nel 1941 alle funzioni polidrome (o corrispondenze, o "funzioni a più valori"). Il Teorema del punto fisso di Kakutani, a sua volta, è alla base di moltissimi risultati in teoria dei giochi ed economia, tra i quali ricordiamo la prova dell'esistenza degli equilibri di Nash e l'ideazione del modello di Arrow-Debreu che valsero il Premio Nobel per l'Economia, rispettivamente, a John Nash (nel 1994) e a Kenneth Arrow (nel 1972) e Gérard Debreu (nel 1983).

Dopo il Teorema di Brouwer, la successiva pietra miliare nella teoria del punto fisso è rappresentata dal lavoro di Stefan Banach che venne reso pubblico nel 1922. Infatti, oltre all'introduzione e allo studio di quelli che sono oggi chiamati spazi di Banach, viene presentato un teorema che assicura l'esistenza e l'unicità di una contrazione definita su uno spazio metrico completo.

Agli inizi degli anni trenta comparve la prima generalizzazione del Teorema di Brouwer a spazi infinito-dimensionali ad opera di Juliusz Schauder, un matematico polacco della scuola di Lwów di cui faceva parte anche Banach.

Il Teorema del punto fisso di Schauder, fu rielaborato negli anni successivi

da Leray, Tychonoff e Schauder stesso in modo da offrire diverse opportunità di applicazioni. In particolare, dato che il Teorema di Schauder trova una proficua applicazione nella risoluzione delle equazioni a derivate parziali, le numerose versioni del teorema di Schauder consentono di sfruttare il teorema anche quando sembra che la versione originale sia inutilizzabile.

Lo sviluppo di queste ricerche fu interrotto dalla Seconda guerra mondiale: Lwów fu invasa prima dai sovietici e poi dai nazisti e tra le conseguenze dell'occupazione dobbiamo ricordare anche la dissoluzione della scuola matematica della città. Schauder, di origine ebraica, fu prima allontanato dal suo lavoro e infine ucciso dalla Gestapo nell'ottobre del 1943.

Dopo la guerra, la teoria dei punti fissi tornò ad attrarre le attenzioni di molti matematici. Negli anni sessanta Helmut Schaefer presentò una versione del Teorema di Schauder le cui ipotesi risultano di facile applicazione in alcuni, importanti casi: in particolare, il Teorema del punto fisso di Schaefer porta ad interessanti conclusioni nello studio delle equazioni alle derivate parziali non lineari, come vedremo nell'ultima sezione.

La diffusione dei calcolatori elettronici e la loro progressiva evoluzione ha dato un grande impulso allo studio dei punti fissi anche dal punto di vista della matematica applicata, dell'analisi numerica, delle equazioni stocastiche e della teoria degli insiemi fuzzy. Tuttavia, non è mai venuto meno l'interesse "classico" nei confronti della teoria dei punti fissi e, a conferma del fatto che i due aspetti della teoria, quello teorico e quello applicativo, sono oggi più che mai vitali.

8.2 Teorema del punto fisso di Banach

Il teorema del punto fisso di Banach risulta di grande importanza dal momento che permette di provare numerosi teoremi di esistenza e unicità in diversi rami dell'analisi. In particolare, il teorema costituisce un chiaro esempio del potere unificante dei metodi dell'analisi funzionale.

Il teorema del punto fisso di Banach o teorema di contrazione riguarda alcune funzioni (*contrazioni*) da uno spazio metrico in sé e presenta condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità di un *punto fisso* (ovvero un punto che coincide con la sua immagine). Il teorema offre inoltre un procedimento iterativo tramite il quale si possono ottenere approssimazioni successive del punto fisso e limitazioni all'errore. Successivamente, presenteremo tre importanti campi di applicazione del teorema:

- equazioni algebriche lineari;
- equazioni differenziali ordinarie;
- equazioni integrali.

Un **punto fisso** di una applicazione $T: X \rightarrow X$ da un insieme X in se stesso è un elemento $x \in X$ che ha come immagine se stesso (è “tenuto fisso”) da T , ossia $T(x) = x$. Diremo anche che l'*immagine* $T(x)$ coincide con x .

Ad esempio, una traslazione non ha punti fissi, una rotazione del piano ha un unico punto fisso (il centro della rotazione), l'applicazione $x \mapsto x^2$ da $\mathbb{R}$ in sè ha due punti fissi (0 e 1) e la proiezione sull'asse delle ascisse $(x, y) \mapsto x$ in $\mathbb{R}^2$ ha infiniti punti fissi (tutti i punti sull'asse x).

Il teorema del punto fisso di Banach è un teorema di esistenza e unicità di un punto fisso per particolari di applicazioni che fornisce anche una procedura costruttiva per determinare un'approssimazione del punto fisso. Questa procedura è chiamata **iterazione**.

Per definizione, questo metodo consiste nella scelta arbitraria di un elemento x_0 in un dato insieme e nel calcolare successivamente una sequenza $x_0, x_1, x_2, \dots$ da una relazione della forma

$$x_{n+1} = T(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

in altre parole, scelto un qualsiasi elemento x_0 nell'insieme dato definiamo $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1)$ e così via.

Procedure iterative sono usate in molte dimostrazioni di convergenza e stime di errori.

DEFINIZIONE 8.1. – *Sia (X, d) uno spazio metrico. Diremo che un'operatore $T: X \rightarrow X$ è una contrazione su X se esiste un numero reale $\alpha < 1$ tale che per ogni $x, y \in X$*

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Da un punto di vista geometrico, questo implica che due punti di X hanno come immagine due punti che sono più vicini tra loro di quanto lo fossero i due punti iniziali; più precisamente, il rapporto tra la distanza delle due immagini e la distanza dei due punti iniziali non supera mai una certa costante α che è strettamente minore di 1.

Come ultimo preliminare, dimostriamo che una contrazione è necessariamente una applicazione continua.

PROPOSIZIONE 8.1. – *Se T è una contrazione su uno spazio metrico (X, d) allora T è una applicazione continua da X in sè.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia ε un numero reale strettamente positivo. Occorre trovare $\delta \in \mathbb{R}$ tale che l'immagine della sfera di centro x e raggio δ sia contenuta nella sfera di centro $T(x)$ e raggio ε . Osserviamo che è sufficiente scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{\alpha}$, dove α è una costante che soddisfa la relazione data nella definizione di contrazione. Infatti, per ogni $y \in X$ per cui valga $d(x, y) < \delta$ si ha

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \delta < \alpha \frac{\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon.$$

TEOREMA 8.1. — *Consideriamo uno spazio metrico (X, d) e supponiamo che X sia completo e che sia definita una contrazione $T: X \rightarrow X$. Allora T ha esattamente un punto fisso.*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è la seguente: con il metodo iterativo si costruisce una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si prova che è di Cauchy e dunque convergente in X e che il suo limite è un punto fisso di T e che T non ammette altri punti fissi.

Scegliamo un qualsiasi punto $x_0 \in X$ e consideriamo la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita applicando ripetutamente l'applicazione T :

$$x_1 = T(x_0), \quad x_2 = T(x_1) = T^2(x_0), \quad \dots, \quad x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad \dots$$

Formalmente, gli elementi della successione sono così definiti:

$$x_n = \begin{cases} x_0 & \text{per } n = 0 \text{ (scelto arbitrariamente)} \\ T(x_{n-1}) & n \geq 1 \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Dalla definizione di contrazione segue immediatamente che esiste $\alpha \in [0, 1)^1$ tale che per la successione appena definita vale, per ogni $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_m) &= d(T(x_m), T(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(T(x_{m-1}), T(x_{m-2})) \leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\ &= \dots \leq \alpha^m d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Pertanto, se n e m sono due numeri naturali qualsiasi tali che $m < n$, usando la disuguaglianza triangolare e la formula per la somma di una progressione geometrica, si ottiene

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \dots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Poichè $0 < \alpha < 1$, si ha che $1 - \alpha^{n-m} < 1$ e, di conseguenza,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \quad \text{se } m < n. \quad (8.2.2)$$

Pertanto, dato che $0 < \alpha < 1$ e che $d(x_0, x_1)$ è una quantità fissa, il termine maggiorante nella (8.2.2) può essere reso arbitrariamente piccolo scegliendo m sufficientemente grande. Questo prova che la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che abbiamo definito è di Cauchy e che, dato che X è completo, converge. Sia $\bar{x}$ il limite della successione proviamo che è un punto fisso per l'applicazione T .

¹ Se $\alpha = 0$ il teorema vale in maniera banale

Dalla disuguaglianza triangolare e la definizione di contrazione, per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha che

$$d(\bar{x}, T(\bar{x})) \leq d(\bar{x}, x_m) + d(x_m, T(\bar{x})) \leq d(\bar{x}, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, \bar{x}).$$

Poichè l'ultima somma può essere resa arbitrariamente piccola scegliendo m sufficientemente grande, segue che $d(x, T(x)) = 0$ e quindi $x = T(x)$.

Supponiamo ora che esista un altro punto fisso per T , ovvero che esista $\bar{x}_1 \in X$ diverso da $\bar{x}$ e tale che $T(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$. Possiamo allora scrivere

$$d(\bar{x}, \bar{x}_1) = d(T(\bar{x}), T(\bar{x}_1)) \leq \alpha d(\bar{x}, \bar{x}_1)$$

che implica immediatamente $d(\bar{x}, \bar{x}_1) = 0$ dato che $\alpha < 1$.

COROLLARIO 8.1. – *Sotto le ipotesi del teorema precedente, la successione (8.2.1) converge all'unico punto fisso $\bar{x}$ di T e per la convergenza si possono dare una stima a priori*

$$d(x_m, \bar{x}) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$$

ed una stima a posteriori

$$d(x_m, \bar{x}) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{m-1}, x_m).$$

Dimostrazione. La prima affermazione è già stata provata nella dimostrazione del teorema. Per la stima *a posteriori*, consideriamo $n > m$:

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^{i-m} d(x_m, x_{m+1}) = d(x_m, x_{m+1}) \sum_{i=0}^{n-m-1} \alpha^i$$

e per $n \rightarrow +\infty$ si ha

$$d(x_m, \bar{x}) \leq d(x_m, x_{m+1}) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \frac{d(x_m, x_{m+1})}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{m-1}, x_m). \quad \square$$

La stima *a priori* può essere usata all'inizio di un calcolo per ricavare il numero di passi necessari per ottenere una data precisione. La stima *a posteriori* può essere usata a metà di un procedimento di calcolo.

Osserviamo che per dimostrare il teorema delle contrazioni non è sufficiente supporre che $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. Possiamo però vedere che, in questo caso, le stime fatte nella dimostrazione non sarebbero più sufficienti a provare il teorema. Inoltre, è possibile esibire un facile controesempio. Nello spazio $X = [1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea consideriamo

l'applicazione $T(x) = x + 1/x$ e osserviamo che, comunque si scelgano x e y in X , si ha

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y + \frac{y - x}{xy} \right| \\ &= |x - y| \cdot \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < |x - y|. \end{aligned}$$

Tuttavia T non è una contrazione perché non è possibile scegliere una costante $\alpha < 1$ come nella Definizione 1, dato che

$$\sup \left\{ 1 - \frac{1}{xy} : x, y \in X \right\} = 1.$$

Infine, è facile vedere che T non ha alcun punto fisso infatti

$$x = T(x) = x + \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x} = 0.$$

Nelle applicazioni può accadere che l'applicazione T sia una contrazione solo se ristretta ad un sottoinsieme Y di X e non su tutto lo spazio X . Comunque, se Y è chiuso allora è anche completo, dunque T ha un punto fisso $\bar{x} \in Y$ e si può costruire una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che tende a $\bar{x}$, a patto di imporre restrizioni sulla scelta del punto iniziale x_0 in modo tale che tutti i punti della successione siano in Y . Un risultato in questa direzione è il seguente.

TEOREMA 8.2. — *Sia T una funzione da uno spazio metrico completo (X, d) in sé e supponiamo che T sia una contrazione su Y , la sfera chiusa di centro x_0 e raggio $r > 0$, ossia $Y = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$. Supponiamo inoltre che*

$$d(x_0, T(x_0)) < (1 - \alpha)r. \quad (8.2.3)$$

Allora la successione definita dalla (8.2.1) converge ad un punto $\bar{x} \in Y$. Questo è un punto fisso per T ed è l'unico punto fisso di T in Y .

Dimostrazione. Dobbiamo solo provare che tutti gli elementi della successione (così come il limite) appartengono a Y e poi è possibile ricondursi alla dimostrazione del Teorema 8.1. Ponendo $m = 0$ nella relazione (8.2.2) della stima a priori, che è valida perché la successione è comunque definita in X , si ha che per ogni $n > 0$ vale

$$d(x_0, x_n) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < r$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata l'ipotesi (8.2.3). Pertanto tutti i punti della successione appartengono a Y ($x_0 \in Y$ perché è il centro della sfera) e, dato che Y è chiuso, anche il limite della successione $\bar{x}$ appartiene a Y .

Concludiamo questa sezione con il seguente corollario che ci sarà utile in alcune applicazioni.

COROLLARIO 8.2. — *Sia $T: X \rightarrow X$ una applicazione che manda uno spazio metrico completo (X, d) in sé. Se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che T^m è una contrazione su X allora T ha un unico punto fisso.*

Dimostrazione. L'applicazione $B = T^m$ è una contrazione sullo spazio metrico completo X , quindi esiste ed è unico un punto fisso per essa, ovvero un punto $\bar{x} \in X$ tale che $B(\bar{x}) = \bar{x}$. Il teorema di Banach ci dice inoltre che per qualsiasi punto $x_0 \in X$ la successione $\{B^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al punto fisso $\bar{x}$. Scegliamo come punto iniziale della successione $x_0 = T(\bar{x})$ e osserviamo che

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} B^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} B^n(T(\bar{x})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(B^n(\bar{x})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\bar{x}) = T(\bar{x}).$$

Questo prova che $\bar{x}$ è un punto fisso per T . Inoltre non ve ne possono essere altri, dato che ogni punto fisso di T è anche un punto fisso di B .

8.3 Applicazioni alle equazioni algebriche lineari

Il teorema del punto fisso di Banach ha importanti applicazioni a metodi iterativi coinvolti nella risoluzione di sistemi di equazioni algebriche lineari e offre condizioni sufficienti per la convergenza e stime per gli errori.

Osserviamo che per poter applicare il teorema di Banach abbiamo bisogno di uno spazio metrico completo e di una contrazione definita su di esso. Prendiamo come insieme X l'insieme di tutte le n -uple ordinate di numeri reali e indicheremo i suoi elementi con $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Su questo insieme consideriamo la funzione distanza

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|. \quad (8.3.4)$$

e si osserva che lo spazio metrico (X, d) risulta completo. Assegnata una matrice $C \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, n \times n)$ ed un vettore $b \in \mathbb{R}^n$, definiamo l'applicazione

$$T(x) = Cx + b.$$

Determiniamo le ipotesi che implicano che l'applicazione T è una contrazione.

Se poniamo $y = T(x)$ e andiamo a scrivere componente per componente la definizione data per T , otteniamo

$$y_i = b_i + \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j$$

dove c_{ij} è l'elemento della matrice C posto nella riga i e nella colonna j .

Sia $z \in X$ e denotiamo la sua immagine $T(z)$ con w , si ha

$$\begin{aligned} d(y, w) = d(T(x), T(z)) &= \max_{i=1, \dots, n} |y_i - w_i| = \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n c_{ij}(x_j - z_j) \right| \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i - z_i| \cdot \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| = d(x, z) \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |c_{ij}|. \end{aligned}$$

Pertanto, se il secondo fattore dell'ultimo termine risulta strettamente minore di 1, possiamo applicare il Teorema di Banach.

TEOREMA 8.3. — *Sia dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite della forma*

$$x = Cx + b,$$

con C e b sono, rispettivamente, una matrice ed un vettore assegnati. Se la matrice C è tale che i suoi coefficienti c_{ij} (di riga i e colonna j) soddisfano

$$\alpha = \sum_{j=1}^n |c_{ij}| < 1$$

allora il sistema ha esattamente una soluzione.

Tale soluzione può essere ottenuta come limite di una qualsiasi successione $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ottenuta scegliendo arbitrariamente $x^{(0)}$ e definita poi ricorsivamente dalla relazione

$$x^{(m+1)} = Cx^{(m)} + b, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Valgono inoltre le seguenti stime:

$$d(x^{(m)}, x) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x^{(m-1)}, x^{(m)}) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x^{(0)}, x^{(1)}).$$

È interessante osservare che è possibile definire un'altra metrica su $\mathbb{R}^n$ ed ottenere un risultato analogo; la metrica scelta influisce unicamente (e direttamente) sulla condizione sulla matrice C richiesta come criterio sufficiente nel teorema. Infatti, nella discussione precedente all'enunciato, abbiamo sfruttato solo definizioni e maggiorazioni non dipendenti dalla scelta della metrica.

Vediamo ora come il Teorema 8.3 trova applicazione nella risoluzione pratica di sistemi lineari. Un sistema lineare è esprimibile nella forma

$$Ax = c$$

dove x è il vettore delle incognite, A è la matrice dei coefficienti e c è il vettore dei termini noti.

Molti metodi iterativi per il calcolo delle soluzioni considerano la scomposizione della matrice A (con $\det A \neq 0$) come una differenza $A = B - G$ tra due matrici, di cui B nonsingolare. Il sistema iniziale assume

$$Ax = c \Rightarrow Bx = Gx + c \Rightarrow x = B^{-1}(Gx + c) = B^{-1}Gx + B^{-1}c$$

ed è possibile applicare il Teorema 8.3 con $C = B^{-1}G$ e $b = B^{-1}c$.

Vediamo ora due esempi di metodi risolutivi per un sistema lineare $Ax = c$ correlati a quanto esposto finora: il metodo iterativo di Jacobi (di particolare interesse teorico) e il metodo iterativo di Gauss-Seidel (che trova largo impiego nelle applicazioni).

Il **metodo iterativo di Jacobi** è caratterizzato da n successioni definite per ricorrenza, una per ciascuna componente x_i del vettore x . Ciascun nuovo elemento della successione dipende dagli elementi immediatamente precedenti in tutte le successioni, nella maniera che segue

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right)$$

dove si suppone che nessuno degli elementi sulla diagonale di A sia nullo. La successione data è ovviamente suggerita dalla soluzione per x_j della j -esima equazione del sistema.

Il collegamento con il Teorema 8.3 si ottiene ponendo $C = D^{-1}(D - A)$ e $b = D^{-1}c$, dove D è la matrice $n \times n$ che ha la diagonale uguale ad A ed è nulla altrove (ossia $d_{ij} = \delta_{ij} a_{ij}$, dove δ_{ij} è il simbolo di Kronecker). La condizione sufficiente per la convergenza della successione presentata nel teorema può essere allora riformulata direttamente in termini dei coefficienti della matrice A ; per ogni $i = 1, \dots, n$ si dovrà avere

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1 \quad \text{ovvero} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < a_{ii}.$$

Questo vuol dire che la convergenza è garantita se gli elementi sulla diagonale principale di A sono sufficientemente grandi rispetto agli altri presenti sulla medesima riga. Osserviamo che alcune componenti del vettore $x^{(m+1)}$ potrebbero essere già disponibili in un certo istante ma non vengono usate finché il calcolo delle altre componenti non è terminato, cioè tutte le componenti di una nuova approssimazione sono introdotte simultaneamente alla fine di un ciclo iterativo. Per questo il metodo iterativo di Jacobi è detto un metodo *a correzioni simultanee*.

Il **metodo iterativo di Gauss-Seidel**, invece, è un metodo *a correzioni successive* nel quale ad ogni passo vengono usati anche i valori appena calcolati

in quello stesso passo ma per altre componenti. Il metodo è infatti identificato dalla successione

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right)$$

dove, ancora una volta, stiamo supponendo che a_{ii} sia diverso da zero per ogni $i = 1, \dots, n$.

Per scrivere in forma matriciale questo approccio scomponiamo la matrice A del sistema lineare come una somma $A = -L + D - U$, dove D è una matrice diagonale definita come nel caso del metodo di Jacobi, L è una matrice triangolare inferiore con gli elementi sulla diagonale tutti nulli e U è una matrice triangolare superiore con gli elementi sulla diagonale tutti nulli. Si osserva che la decomposizione proposta è univocamente determinata e che i segni sono così scelti per una questione di convenienza successiva. La successione sopra definita può allora essere scritta come

$$x^{(m+1)} = D^{-1} (c + Lx^{(m+1)} + Ux^{(m)})$$

e, moltiplicando per D e riordinando, si ottiene

$$(D - L)x^{(m+1)} = c + Ux^{(m)}.$$

Infine, moltiplichiamo per $(D - L)^{-1}$ e troviamo la forma

$$x^{(m+1)} = (D - L)^{-1} Ux^{(m)} + (D - L)^{-1} c$$

che ci consente di applicare il Teorema 8.3 ponendo $C = (D - L)^{-1} U$ e $b = (D - L)^{-1} c$. La condizione per la convergenza risulta un po' complicata da trascrivere, tuttavia riportiamo che quella data per il metodo di Jacobi è sufficiente anche se è possibile ricavare condizioni migliori.

8.4 Applicazioni alle equazioni differenziali

Le applicazioni più interessanti del teorema del punto fisso di Banach si trovano in connessione con gli spazi di funzioni. Il teorema di Banach conduce a teoremi di esistenza e unicità per equazioni differenziali e integrali. Considereremo infatti in questa sezione una *equazione differenziale ordinaria del primo ordine esplicita*

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{8.4.5}$$

dove $x = x(t)$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ nella variabile indipendente t . Nel seguito, quando non ci sarà pericolo di ambiguità, scriveremo semplicemente x per la funzione $x(t)$ e x' per la sua derivata.

Un **problema a valore iniziale** per (8.4.5) consiste nell'equazione con l'aggiunta di una *condizione iniziale*

$$x(t_0) = x_0 \quad (8.4.6)$$

dove t_0 e x_0 sono valori reali assegnati.

Dal teorema di Banach segue il famoso risultato di Picard che ricopre un ruolo vitale nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie. L'idea di base è piuttosto semplice: si trasforma l'equazione (8.4.5) in un'equazione integrale che permette di definire una contrazione T ed il cui punto fisso è la soluzione del nostro problema.

TEOREMA 8.4. — *Sia $f \in C(R)$, dove R è il rettangolo di $\mathbb{R}^2$ definito da*

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, \quad |x - x_0| \leq b\}$$

e sia $M = \max_R |f(x, t)|$. Supponiamo che f soddisfi la condizione di Lipschitz su R rispetto al secondo argomento, ovvero che esista una costante k tale che per ogni coppia di punti $(t, x), (t, z) \in R$ si abbia

$$|f(t, x) - f(t, z)| \leq L|x - z|. \quad (8.4.7)$$

Allora il problema a valore iniziale definito da (8.4.5)-(8.4.6) ha una unica soluzione definita nell'intervallo $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, con $\beta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$.

Il teorema di Weierstrass assicura l'esistenza del massimo M in quanto f è continua e R è un compatto.

Inoltre osserviamo che è possibile dare condizioni meno restrittive per β , ovvero si può provare che il teorema rimane valido se la condizione riportata si sostituisce con $\beta < \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Dimostrazione. Sia $C(J)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali definite sull'intervallo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ e sia d la metrica, che genera uno spazio completo, definita da

$$d(x, y) = \max_{t \in J} \{|x(t) - y(t)|\} = \|x - y\|_\infty \quad (8.4.8)$$

Consideriamo il sottospazio $X \subset C(J)$ costituito da tutte le funzioni $x \in C(J)$ che soddisfano

$$|x(t) - x_0| \leq b, \quad \forall t \in J.$$

X è chiuso in $C(J)$ e pertanto completo rispetto alla restrizione della metrica d . Definiamo il seguente operatore $T : X \rightarrow X$:

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

L'integrale a secondo membro è ben definito per le ipotesi di continuità su f . Per mostrare che T manda D in se stesso usiamo la limitatezza di f su R :

$$|T(x)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) \, d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq M\beta \leq b$$

Infine, proviamo che T è una contrazione usando la proprietà di Lipschitz della funzione f :

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(z)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, z(\tau))] \, d\tau \right| \\ &\leq |t - t_0| \max_{\tau \in J} (L \cdot |x(\tau) - z(\tau)|) \leq L\beta d(x, z). \end{aligned}$$

la tesi segue se $L\beta < 1$.

Dal momento che T è una contrazione possiamo applicare il teorema di Banach: esiste ed è unico un punto fisso $\bar{x} = \bar{x}(t) \in X$ dell'operatore T , ovvero una funzione continua $\bar{x}(t)$ definita su J che soddisfa

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{x}(\tau)) \, d\tau.$$

ed inoltre $\bar{x} = \bar{x}(t)$ soddisfa evidentemente il problema a valore iniziale definito da (8.4.5) e (8.4.6).

Il teorema di Banach implica anche che la soluzione dell'equazione differenziale è il limite della successione $\{x_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita dall'*iterazione di Picard*

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x_n(\tau)) \, d\tau. \quad (8.4.9)$$

Osserviamo che la continuità di f è sufficiente (ma non necessaria) per l'esistenza delle soluzioni ma non per l'unicità. La condizione di Lipschitz è sufficiente ma non necessaria. Ad esempio il seguente problema di Cauchy:

$$x' = 3x^{\frac{2}{3}}, \quad x(0) = 0$$

ammette due soluzioni distinte $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = t^3$. Si noti che la funzione $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ non soddisfa la condizione di Lipschitz in nessun intorno di 0.

8.5 Applicazioni alle equazioni integrali

Vediamo infine come è possibile dedurre teoremi di esistenza e unicità di soluzioni di equazioni integrali dal teorema del punto fisso di Banach.

Un'equazione integrale della forma

$$\int_a^b k(t, \tau)x(\tau) d\tau = z(t)$$

è detta un'**equazione di Fredholm del primo tipo**.

L'incognita è la funzione $x(t)$ definita su un intervallo assegnato $J = [a, b]$; il **kernel o nucleo** dell'equazione è la funzione k definita sul quadrato $Q = [a, b] \times [a, b]$ ed è una funzione assegnata, così come $z(t)$, definita anch'essa su J .

A questo tipo di equazioni non si riesce ad applicare direttamente il procedimento del metodo iterativo e quindi prendiamo in esame l'equazione di Fredholm *del secondo tipo*;

$$x(t) - \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau) d\tau = z(t) \quad (8.5.10)$$

dove μ è un parametro assegnato.

Le equazioni integrali possono essere considerate su vari spazi di funzioni, tuttavia in questa sezione assumiamo che (8.5.10) sia definita sulla classe delle funzioni continue $C(J)$, con la metrica usuale (8.4.8).

TEOREMA 8.5. — *Consideriamo un'equazione di Fredholm del secondo tipo (8.5.10) con le notazioni e le restrizioni sopra introdotte.*

Supponiamo inoltre che $k \in C(R)$ e $z \in C(J)$ e denotiamo $M = \max\{k(t, \tau) : (t, \tau) \in R\}$.

Se la costante μ soddisfa

$$|\mu| < \frac{1}{M(b-a)} \quad (8.5.11)$$

allora esiste ed è unica una soluzione $\bar{x}(t)$.

La funzione $\bar{x}$ è il limite di una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, del tipo iterativo (8.2.1), dove x_0 è un'arbitraria funzione in $C(J)$ e gli elementi successivi sono definiti, per $n \in \mathbb{N}$, dalla seguente relazione

$$x_{n+1}(t) = z(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x_n(\tau) d\tau.$$

Dimostrazione. Dalle ipotesi di continuità su k e z risulta ben definita la seguente applicazione $T : C(J) \rightarrow C(J)$:

$$T(x)(t) = z(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Proviamo che l'operatore T è una contrazione rispetto alla metrica di $C(J)$:

$$\begin{aligned} |T(x)(t) - T(y)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^b k(t, \tau) [x(\tau) - y(\tau)] \, d\tau \right| \\ &\leq |\mu| M (b - a) \max_{t \in J} \{|x(t) - y(t)|\} \\ &= |\mu| M (b - a) d(x, y) \end{aligned}$$

Quindi, dato che μ soddisfa la condizione (8.5.11), si ha che T è una contrazione su $C(J)$. Dal teorema di Banach segue la tesi.

Consideriamo un **equazione integrale di Volterra** che ha la forma

$$x(t) - \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau) \, d\tau = z(t) \quad (8.5.12)$$

TEOREMA 8.6. — *Si consideri l'equazione integrale di Volterra (8.5.12). Se $z \in C(J)$ e $k = k(t, \tau) \in C(R)$, dove R è il triangolo $\{(t, \tau) : a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq t\}$, allora esiste ed è unica una soluzione.*

Dimostrazione. Definiamo l'operatore in $C(J)$

$$T(x)(t) = z(t) + \mu \int_a^t k(t, \tau) x(\tau) \, d\tau \in C(J)$$

che risulta ben posta per la continuità di k e x .

Il triangolo R è chiuso e limitato e dunque compatto: pertanto esiste $M > 0$ tale che $|k(t, \tau)| \leq M$ per ogni $(t, \tau) \in R$.

Consideriamo la metrica (8.4.8) sullo spazio $C(J)$ e otteniamo, in maniera del tutto analoga a quanto fatto nella dimostrazione precedente, la relazione

$$|T(x)(t) - T(y)(t)| \leq |\mu| M (t - a) d(x, y), \quad (8.5.13)$$

che tuttavia non è sufficiente a concludere che T è una contrazione. Dimostriamo che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che T^m è una contrazione e questo ci permetterà di concludere, grazie al Corollario 2, l'esistenza e unicità della soluzione.

Proviamo, per induzione, che per ogni $m \geq 1$ vale la seguente relazione²:

$$|T^m(x)(t) - T^m(y)(t)| \leq |\mu|^m M^m \frac{(t - a)^m}{m!} d(x, y). \quad (8.5.14)$$

La base dell'induzione è data da (8.5.13) quindi tenendo conto che $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ si ha

² In realtà la relazione è valida (banalmente) anche per $m = 0$, se definiamo T^0 come la funzione identità.

$$\begin{aligned}
|T^{m+1}m(x)(t) - T^{m+1}(y)(t)| &= |\mu| \left| \int_a^t k(t, \tau) [T^m(x)(\tau) - T^m(y)(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| M \int_a^t |\mu|^m M^m \frac{(\tau - a)^m}{m!} d(x, y) d\tau \\
&= |\mu|^{m+1} M^{m+1} \frac{(t - a)^{m+1}}{(m+1)!} d(x, y).
\end{aligned}$$

Deduciamo ora dalla (8.5.14), usando il fatto che $t \leq b$ e poi considerando il massimo per $t \in J$ nel primo membro, la disuguaglianza

$$d(T^m(x), T^m(y)) \leq \alpha_m d(x, y)$$

dove $\alpha_m = |\mu|^m M^m (b - a)^m / m!$. Poichè a, b, M e μ sono fissi, è evidente che per m sufficientemente grande si ha $\alpha_m < 1$. Esiste quindi un valore per cui T^m è una contrazione e questo conclude la dimostrazione.

8.6 Il teorema del punto fisso di Brouwer

In questo capitolo presentiamo il Teorema del punto fisso di Brouwer, un celebre risultato che trova numerose applicazioni in diversi rami della matematica. Ha infatti rilevanti conseguenze nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali, della topologia algebrica e differenziale e della teoria dei giochi. Non è dunque una sorpresa l'esistenza di dimostrazioni che poggiano su argomenti diversi e apparentemente scollegati tra loro: la dimostrazione che maggiormente si adatta agli argomenti trattati in queste note, ovvero una dimostrazione di carattere analitico.

Diamo l'enunciato del teorema ed alcune considerazioni generali.

TEOREMA 8.7. — *Siano K un sottoinsieme convesso e compatto di $\mathbb{R}^N$ e $f: K \rightarrow K$ una funzione continua. Allora f ha almeno un punto fisso.*

Innanzitutto osserviamo le differenze tra questo risultato ed il Teorema del punto fisso di Banach. Nel Teorema di Brouwer abbiamo delle restrizioni sul dominio della funzione e non è più garantita l'unicità del punto fisso. Tuttavia non è più richiesto che l'applicazione in questione sia una contrazione ma è sufficiente che sia continua.

OSSERVAZIONE 8.1. —

- *L'impossibilità di provare l'unicità del punto fisso nelle ipotesi del Teorema di Brouwer segue immediatamente dal caso della funzione identità da K in K . Altri semplici esempi possono derivare, per K opportuno, dalla simmetria rispetto ad una retta, un piano o un altro sottospazio.*

- *Il Teorema di Brouwer è un risultato non costruttivo mentre, come abbiamo visto, il Teorema di Banach offre una procedura iterativa che permette di ottenere un'approssimazione del punto fisso e di stimare l'errore.*
- *Inoltre, vale la pena osservare che per $N = 1$, K è un intervallo chiuso $[a, b]$ e il teorema afferma che una funzione continua f ammette sempre un punto fisso, infatti dal teorema degli zeri: considerata la funzione continua $g(x) = f(x) - x$ si ha $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$.*

8.7 Dimostrazione del Teorema di Brouwer

Diamo il Teorema di non-retrazione della superficie sferica sulla sfera per applicazioni di classe C^1 .

In topologia si chiama retrazione di uno spazio topologico X in suo sottospazio M un'applicazione continua di X in M che vale l'identità in M .

TEOREMA 8.8. — *Sia $f: \overline{B(0,1)} \rightarrow \partial B(0,1)$ di classe C^1 . Allora esiste $x \in \partial B(0,1)$ tale che $f(x) \neq x$.*

In altre parole non esiste un'applicazione $f: \overline{B(0,1)} \rightarrow \partial B(0,1)$ di classe C^1 che vale l'identità su $\partial B(0,1)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni $x \in \partial B(0,1)$ si abbia $f(x) = x$. Per ogni $t \in [0, 1]$ definiamo:

$$f_t(x) = (1-t)x + tf(x)$$

La funzione f_t va ad $\overline{B(0,1)}$ in $\overline{B(0,1)}$ ed inoltre è una retrazione dal momento che la restrizione di f_t a $\partial B(0,1)$ è l'identità.

Sia

$$C = \max \left\{ \|Df(x)\|, x \in \overline{B(0,1)} \right\},$$

dal momento che

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$$

segue

$$\|f_t(x) - f_t(y)\| \geq (1-t)\|x - y\| - t\|f(x) - f(y)\| \geq ((1-t) - Ct)\|x - y\|$$

Quindi, per $0 \leq t < \frac{1}{1+C}$, f_t è iniettiva, e dal momento che f_t è l'identità su $\partial B(0,1)$ si ha che $f_t(\overline{B(0,1)}) \subset B(0,1)$.

Calcolando il gradiente di f_t per $0 \leq t < \frac{1}{1+C}$, si ha

$$Df_t(x) = (1-t)I + tDf(x) = (1-t) \left(I + \frac{t}{1-t} Df(x) \right).$$

Proviamo che $\|Df_t\| > 0$, infatti

$$\|Df_t(x)\| = (1-t) \left\| I - \left(\frac{t}{1-t} (-Df(x)) \right) \right\| \geq \|I\| - \frac{t}{1-t} \|Df(x)\| > 0.$$

Segue che per questi valori di t , $Df_t(x)$ è invertibile per ogni x . Per il teorema d'inversione locale segue che f_t è un diffeomorfismo locale su $B(0,1)$ e quindi l'immagine di $B(0,1)$ tramite f_t è un aperto di $B(0,1)$.

Proviamo che f_t è anche suriettivo e che $f_t(B(0,1)) = B(0,1)$ e dal momento che $f_t(\partial B(0,1)) = \partial B(0,1)$ basta provare che $f_t(B(0,1)) = B(0,1)$.

Supponiamo per assurdo che $f_t(B(0,1)) \subset B(0,1)$ ed esiste $\bar{y} \in B(0,1) - f_t(B(0,1))$.

Per $y_0 \in f_t(B(0,1))$, definiamo

$$s_0 = \inf \{ s > 0; \ y_s = (1-s)y_0 + s\bar{y} \notin f_t(B(0,1)) \}$$

L'insieme $f_t(B(0,1))$ è un aperto ed esiste un intorno di y_0 interamente contenuto in $f_t(B(0,1))$, quindi $s_0 > 0$ ed inoltre $s_0 \neq 1$ (poichè $\bar{y} \notin f_t(B(0,1))$).

Denotiamo $s_h = s_0 - \frac{1}{h}$ e consideriamo la successione definita da

$$y_{s_h} = (1-s_h)y_0 + s_h\bar{y} \in f_t(B(0,1))$$

che converge a y_{s_0} e quindi esiste x_h tale che

$$f_t(x_h) = y_{s_h} \longrightarrow y_{s_0}.$$

Poichè $(x_h) \in \overline{B(0,1)}$ ha un estratta convergente a $x_0 \in \overline{B((0,0),1)}$.

Dalla continuità di f_t segue che $f_t(x_0) = y_{s_0}$.

Proviamo che $x_0 \notin \partial B(0,1)$. Se $x_0 \in \partial B(0,1)$ si ha che $f_t(x_0) = x_0 = y_{s_0} \in \partial B(0,1)$ e dal momento che tutto il segmento $y_s = (1-s)y_0 + s\bar{y} \subset B(0,1)$, si avrebbe che $s_0 = 0$. Allora x_0 è interno a $B(0,1)$ ed esiste quindi un intorno di I di x_0 contenuto in $B(0,1)$ e la sua immagine $f_t(I) \subset f_t(B(0,1))$ è un intorno di y_{s_0} , visto che f_t è continua.

L'ultima affermazione implica che esiste $s_1 > s_0$ tale che $y_s \in f_t(B(0,1))$ per ogni $t \in [s_0, s_1]$ e questo contraddice la definizione di s_0 .

Abbiamo quindi provato che per $0 \leq t < \frac{1}{1+C}$, f_t è un C^1 -diffeomorfismo di $B(0,1)$ in sè. Poniamo

$$H(t) = \int_{B(0,1)} \det Df_t(x) dx,$$

dal momento che $\det Df_t \neq 0$ intorno a 0 e $f_t(B(0,1)) = B(0,1)$, dal cambiamento di variabili segue che il valore di $H(t)$ non dipende da t , infatti

$$H(t) = \int_{B(0,1)} dx = |B(0,1)|.$$

Da altra parte il valore di $H(t)$ nella variabile t è un polinomio di grado inferiore o uguale a n e quindi si deve avere $H(1) = H(0) = |B(0,1)|$.

Si arriva all'assurdo che $\det Df_1 = \det Df \neq 0$ contro il fatto che f è una retrazione e quindi deve essere $\det Df = 0$, perché in caso contrario l'immagine di un sottoinsieme di $B(0,1)$ non potrebbe essere un insieme con interno vuoto.

Dimostrazione del Teorema 8.7.

PASSO I. cominciamo con il provare che se il risultato vale per tutte le sfere chiuse $\overline{B(0,R)}$ con $R > 0$ allora è valido anche per tutti i sottoinsiemi convessi e compatti K di $\mathbb{R}^N$.

Sia $f : K \rightarrow K$, poichè K è limitato, esiste $R > 0$ tale che $K \subset \overline{B(0,R)}$ e poichè K è convesso e chiuso, risulta ben definita e continua la proiezione p_K che associa ad ogni $y \in \mathbb{R}^N$ quell'elemento $x \in K$ tale che $\|y - x\| = \inf_{k \in K} \|y - k\|$.

Pertanto l'applicazione composta $f \circ p_K$ è ben definita e continua da $\overline{B(0,R)}$ in K e in particolare da $\overline{B(0,R)}$ in sè.

Quindi, supponendo che il teorema valga per le sfere chiuse, esiste $\bar{x} \in \overline{B(0,R)}$ tale che $\bar{x} = f \circ p_K(\bar{x})$. Dato che f è a valori in K vuol dire che $\bar{x} \in K$ e dunque $p_K(\bar{x}) = \bar{x}$. Segue che $\bar{x} = f(\bar{x})$, ossia $\bar{x}$ è un punto fisso per $f : K \rightarrow K$.

PASSO II. Proviamo che se il teorema è vero per $\overline{B(0,1)}$ allora è vero per le sfere chiuse di raggio $R > 0$. La funzione continua

$$\begin{aligned} g: \overline{B(0,1)} &\longrightarrow \overline{B(0,1)} \\ x &\longmapsto \frac{1}{R}f(Rx) \end{aligned}$$

ammette un punto fisso $\bar{x} \in \overline{B(0,1)}$. Segue che $\bar{y} = R\bar{x}$ è un punto fisso per $f : \overline{B(0,R)} \rightarrow \overline{B(0,R)}$. Infatti si ha

$$f(\bar{y}) = f(R\bar{x}) = Rg(\bar{x}) = R\bar{x} = \bar{y}.$$

PASSO III. Supponiamo che f sia di classe C^1 . Definiamo la funzione definita in $\overline{B(0,1)}$ di classe C^1 :

$$u(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

che ha valori in $\partial B(0,1)$.

Consideriamo la retta che passa per x con direzione $u(x)$. Questa retta incontra $\partial B(0,1)$ in due punti, denotiamo con $g(x)$ il punto di intersezione dal lato

di x su tale retta. Ovviamente g ha valori in $\partial B(0, 1)$. Proviamo che anche $g \in C^1$.

Per costruzione $g(x) = x + t(x)u(x)$ con la funzione $t(x) \in \mathbb{R}$ che si ricava imponendo che

$$\|g(x)\|^2 = 1 \implies \|x\|^2 + 2t(x)(x, u(x)) + t^2(x) - 1 = 0$$

e si ottiene:

$$t(x) = -(x, u(x)) + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x, u(x))^2}.$$

Quindi t è una funzione ben definita essendo la soluzione di un polinomio di secondo grado ed è di classe $C^1(\mathbb{R})$, di conseguenza anche $g \in C^1(\overline{B(0, 1)}, 1)$. Inoltre se $\|x\| = 1$, si ha $t(x) = 0$ e quindi se $x \in \partial B(0, 1)$ allora $g(x) = x$, che è in contraddizione con il teorema 8.8 della retrazione. **PASSO IV.** Sia f un'applicazione solo continua di $\overline{B(0, 1)}$ in $\overline{B(0, 1)}$ e supponiamo che non ammetta un punto fisso. Di conseguenza esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\|x - f(x)\| \geq \alpha, \quad \forall x \in \overline{B(0, 1)}$$

Per il teorema di densità di Weierstrass esiste un'applicazione polinomiale $h : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}^m$, di classe $C^1(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|f(x) - h(x)\| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \forall x \in \overline{B(0, 1)}.$$

Di conseguenza,

$$\|x - h(x)\| \geq \frac{\alpha}{2}, \quad \forall x \in \overline{B(0, 1)}$$

e quindi anche h non possiede punti fissi, in contraddizione con quanto abbiamo dimostrato nel passo precedente.

8.8 Teorema del punto fisso di Schauder

Presentiamo adesso un esempio dovuto a Kakutani che mostra che in l^2 si riesce a costruire un operatore continuo che lascia invariata la palla unitaria ma non ha punti fissi.

OSSERVAZIONE 8.2. — *Consideriamo lo spazio $\ell^2(\mathbb{R})$ delle successioni di numeri reali a quadrato sommabile, ovvero costituito da tutti gli elementi $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ tali che*

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

e definiamo la seguente applicazione in l^2 in sè

$$T(x) = \left(\frac{1}{2}(1 - \|x\|^2), x_1, x_2, \dots \right)$$

per ogni $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$. **Proviamo che T è continua, infatti:**

$$\|T(x) - T(y)\|^2 = \frac{1}{4} [\|x\|^2 - \|y\|^2]^2 + \|x - y\|^2, \quad (8.8.15)$$

ed inoltre l'insieme $\{x \in l^2 : \|x\| \leq 1\}$ è invariante. Infatti per $\|x\| \leq 1$ si ha

$$\|T(x)\|^2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \|x\|^2) \right]^2 + \|x\|^2 \leq 1$$

dal momento che la funzione $g(t) = 1 - \frac{1}{4}(1 - t^2)^2 - t^2$ è positiva e decrescente nell'intervallo $[0, 1]$. Si vede che T non ha un punto fisso $T(x_0) = x_0$ nella palla unitaria. Se $\|x_0\| = 1$ allora $T(x_0) = (0, x_1, x_2, \dots)$, si avrebbe $x_{0j} = 0$ per ogni j e quindi $\|x_0\| = 0$. Nei punti interni la palla, se $\|x_0\| = \alpha < 1$ allora $T(x_0) = (\frac{1}{2}(1 - \alpha^2), \frac{1}{2}(1 - \alpha^2), \dots)$, che è assurdo visto che $x_0 \in l^2$.

Il Teorema di Heine-Borel dà una caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di uno spazio a dimensione finita: $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. L'esempio di Kakutani ci dice quindi che, se vogliamo estendere il Teorema di Brouwer al caso infinito-dimensionale, non è sufficiente supporre che l'insieme nel quale cerchiamo un punto fisso sia chiuso e limitato. Presentiamo le due versioni del noto teorema di punto fisso di Schauder ed in entrambi i casi un'opportuna ipotesi di compattezza ci permette di costruire una successione di opportuni spazi di dimensione finita e di applicare a ciascuno di essi il Teorema del punto fisso di Brouwer.

Vale il seguente **Teorema del punto fisso di Schauder**:

TEOREMA 8.9. — *Sia X uno spazio di Banach, $K \subset X$ è convesso e compatto e $T: K \rightarrow K$ è un operatore continuo, allora T ammette un punto fisso su K .*

Dimostrazione. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Poichè K è compatto esistono $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon} \in K$ tali che

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B(x_j, \varepsilon).$$

Denotiamo con E_ε lo spazio vettoriale generato da $\{x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}\}$ e per $j = 1, \dots, n_\varepsilon$ definiamo le funzioni $b_j: K \rightarrow \mathbb{R}$ definite per da

$$b_j(x) = (\varepsilon - \|x - x_j\|)^+$$

Se x appartiene a K allora esiste $j \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$ tale che $x \in B(x_j, \varepsilon)$ e dunque $b_j(x) > 0$. Denotiamo

$$B(x) = \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} b_j(x)$$

e definiamo

$$G_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(x)}{B(x)} x_j. \quad (8.8.16)$$

Osserviamo innanzitutto che, per ogni $x \in K$, si ha

$$\|G_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon, \quad (8.8.17)$$

infatti

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(x) - x\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(x)}{B(x)} (x_j - x) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(x)}{B(x)} (x_j - x) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(x)}{B(x)} \|x_j - x\| < \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(x)}{B(x)} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

per ogni $x \in K$ si ha che $G_\varepsilon(x)$ è una combinazione lineare e convessa di $x_1, \dots, x_{n_\varepsilon}$ e quindi $G_\varepsilon(x) \in E_\varepsilon \cap K$, dunque $G_\varepsilon(K) \subset E_\varepsilon \cap K$.

Inoltre la funzione G_ε è continua e possiamo quindi applicare il Teorema di Brouwer alla funzione $G_\varepsilon \circ T$ che mappa il convesso compatto $E_\varepsilon \cap K$ in sé: esiste $x_\varepsilon \in E \cap K$ tale che

$$G_\varepsilon(T(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon.$$

Consideriamo allora $\varepsilon = \frac{1}{h}$, $h \in \mathbb{N}$ otteniamo quindi una successione di punti x_h , ciascuno dei quali è un punto fisso per l'applicazione $G_h \circ T$ definita su $E_h \cap K$ quindi $G_h(T(x_h)) = x_h$. Da questa successione, per la compattezza di K , possiamo estrarre una sottosuccessione, che indicheremo ancora con x_h , convergente ad un elemento x_0 . Per la continuità di T , la successione $T(x_h)$ converge a $T(x_0)$. Da (8.8.17):

$$\|x_h - T(x_0)\| \leq \|G_h(T(x_h)) - T(x_h)\| + \|T(x_h) - T(x_0)\| < \frac{2}{h},$$

quindi

$$x_0 = \lim_h x_h = T(x_0).$$

Nella seconda versione del Teorema di Schauder ci si limita a chiedere che l'insieme K sia chiuso e limitato, e l'ipotesi di compattezza viene richiesta sulla funzione.

Per completezza, richiamiamo la definizione di operatore compatto:

DEFINIZIONE 8.2. – *Un'operatore continuo T da uno spazio di Banach X in sè si dice compatto (o anche completamente continuo) se manda insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Ovvero, se per ogni $B \subset X$ limitato di X si ha che $\overline{T(B)}$ è compatto.*

Diamo ora il **Secondo Teorema del punto fisso di Schauder**:

TEOREMA 8.10. – *Sia X uno spazio di Banach. Se $K \subset X$ è convesso, chiuso e limitato e $T: K \rightarrow K$ è un operatore compatto, allora T ammette un punto fisso su K .*

Dimostrazione. L'insieme $T(K)$ è l'immagine del limitato K e quindi è relativamente compatto in X . Fissato $\varepsilon > 0$, dato che $\overline{T(K)}$ è compatto, esistono $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $v_1, \dots, v_{n_\varepsilon} \in \overline{T(K)} \subset K$ tali che

$$T(K) \subset \overline{T(K)} \subset \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} B(v_i, \varepsilon).$$

Sia E_ε lo spazio generato da $\{v_1, \dots, v_{n_\varepsilon}\}$ e per $u \in \overline{T(K)} \subset K$ possiamo definire:

$$b_j(u) = (\varepsilon - \|u - v_j\|)^+ \\ G_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(u)}{\sum_{j=1}^{n_\varepsilon} b_j(u)} v_j.$$

per ogni $u \in \overline{T(K)}$ $G_\varepsilon(u)$ è combinazione lineare e convessa di $\{v_1, \dots, v_{n_\varepsilon}\} \in \overline{T(K)} \subset K$ e quindi si ha $G_\varepsilon(T(K \cap E_\varepsilon)) \subset K \cap E_\varepsilon$. Dal momento che $G_\varepsilon \circ T$ è continuo, dal Teorema di Brouwer esiste $x_\varepsilon \in E_\varepsilon \cap K$ tale che

$$G_\varepsilon(T(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon.$$

Osserviamo poi che vale la seguente stima per ogni $x \in K$:

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(T(x)) - T(x)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(T(x))}{B(T(x))} (T(x))(v_j - T(x)) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \frac{b_j(T(x))}{B(T(x))} \|v_j - T(x)\| < \varepsilon \end{aligned} \quad (8.8.18)$$

Consideriamo la successione di numeri reali strettamente positivi $\varepsilon_h = \frac{1}{h}$ ed ad ognuno di essi associamo un elemento $x_h \in E \cap K$ tale che $G_{\varepsilon_h}(T(x_h)) = x_h$. La successione di elementi $T(x_h)$ è nel compatto $\overline{T(K)}$ e quindi ammette una sottosuccessione, che indicheremo ancora con $T(x_h)$, convergente a $x_0 \in \overline{T(K)}$.

Da (8.8.18) si ha

$$\|x_h - x_0\| = \|G_{\varepsilon_h}(T(x_h)) - x_0\| \leq \|x_h - T(x_h)\| + \|T(x_h) - x_0\| < \frac{2}{h}$$

quindi $x_h \rightarrow x_0$ ma per la continuità di T , che $T(x_h)$ tende a $T(x_0)$, possiamo concludere, per l'unicità del limite, che $T(x_0) = x_0$.

In molte applicazioni del Teorema di Schauder lo spazio di Banach considerato è lo spazio delle funzioni continue $C(A)$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ con l'usuale norma $\|f\|_\infty$.

Dato che per poter applicare il Teorema di Schauder dovremo essere in grado di stabilire se un dato sottoinsieme di $C(A)$ è compatto, per completezza, riportiamo l'enunciato del Teorema di Ascoli-Arzelà :

TEOREMA 8.11. – ***Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto. Allora un insieme $S \subset C(K)$ è relativamente compatto in $C(K)$ se e solo se le funzioni in S sono uniformemente limitate ed equicontinue su K .***

Denotiamo con I l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, e sia $K(t, s)$ una funzione continua in $I \times I$ e $f(s, z)$ continua e limitata per $I \times \mathbb{R}$. Proveremo che la seguente equazione integrale

$$u(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s, u(s)) \, ds \quad (8.8.19)$$

ammette almeno una soluzione $\bar{u} \in C^0(I)$.

Definiamo l'operatore

$$T : u \in C^0(I) \rightarrow \int_0^1 K(t, s) f(s, u(s)) \, ds.$$

Proviamo che $T(C^0(I)) \subset C^0(I)$ e quindi che per ogni $u \in C^0(I)$ si ha $T(u) \in C^0(I)$

Dalle ipotesi segue che esiste $B > 0$ tale che $|f(s, z)| \leq B$ per ogni $(s, z) \in I \times \mathbb{R}$. Inoltre il nucleo K è continuo sul compatto $I \times I$ e dunque è uniformemente continua: per qualsiasi scelta di $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|K(t, s) - K(t_0, s_0)| < \frac{\varepsilon}{B} \quad \text{se} \quad \|(t, s) - (t_0, s_0)\| < \delta$$

e di conseguenza, per ogni $u \in C^0(I)$, per $|t - t_0| < \delta$ si ha

$$\begin{aligned} \left| T(u)(t) - T(u)(t_0) \right| &= \left| \int_0^1 (K(t, s) - K(t_0, s)) f(s, u(s)) \, ds \right| \\ &\leq B \int_0^1 |K(t, s) - K(t_0, s)| \, ds < \varepsilon \end{aligned} \quad (8.8.20)$$

quindi $T(u) \in C(I)$.

Proviamo che esiste $S \subset C^0(I)$ tale che $T(S) \subset S$. Consideriamo la sfera chiusa

$$S = \{u \in C^0(I) : \|u\| \leq D\}$$

dove D è una costante reale positiva che sceglieremo in seguito.

Sia M il valore massimo assunto dalla funzione $K(t, s)$ continua nel compatto $I \times I$, si ha

$$|T(u)(t)| \leq \int_0^1 |K(t, s)| |f(s, u(s))| \, ds \leq B M$$

e quindi basta scegliere $D = M B$.

Per poter applicare il secondo del Teorema di Schauder con $X = C^0(I)$, $K = S$ e $F = T$, dobbiamo provare che T è continuo e compatto su S .

Dalla definizione di D segue che $|u(t)| \leq D$ per ogni $t \in I$ e la continuità di f sul compatto $I \times [-D, D]$ implica che f è uniformemente continua su $I \times [-D, D]$. Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(s, z) - f(s_0, z_0)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{se} \quad \|(s, z) - (s_0, z_0)\| < \delta.$$

Quindi, comunque si scelgano $u_1, u_2 \in S$ con la condizione che $\|u_1 - u_2\| < \delta$, avremo che

$$\begin{aligned} |T(u_1)(t) - T(u_2)(t)| &\leq \int_0^1 |K(t, s)| |(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)))| \, ds \leq \quad (8.8.21) \\ &\leq M \int_0^1 |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| \, ds < \varepsilon, \end{aligned}$$

passando al sup al primo membro, si ha che T è un operatore continuo. Dal Teorema di Ascoli-Arzelà segue che T è compatto, infatti le funzioni in S sono uniformemente limitate e per (8.8.20) equicontinue, quindi il Teorema di Schauder implica che T ha un punto fisso e di conseguenza l'equazione (8.8.19) ha una soluzione in S .

8.9 Il teorema del punto fisso di Schaefer

In questa sezione presentiamo il Teorema del punto fisso di Schaefer, che può essere interpretato come un'altra versione del teorema di Schauder ed è talvolta chiamato *Principio di Leray-Schauder*.

Un operatore T da uno spazio di Banach X in sé si dice **compatto per successioni** se, data una qualsiasi successione limitata di elementi in X , l'immagine di tale successione tramite T ammette una sottosuccessione convergente.

TEOREMA 8.12. — *Sia X uno spazio di Banach, che $T: X \rightarrow X$ sia un operatore continuo e compatto tale che l'insieme*

$$A = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \{x \in X : x = \lambda T(x)\}$$

sia limitato. Allora T ha un punto fisso.

Dimostrazione. Per l'ipotesi di limitatezza su A esiste $R > 0$ tale che

$$\|x\| < R, \quad \forall x \in A. \quad (8.9.22)$$

Definiamo l'operatore $U: X \rightarrow X$:

$$U(x) = \begin{cases} T(x) & \text{se } \|T(x)\| \leq R \\ \frac{T(x)R}{\|T(x)\|} & \text{se } \|T(x)\| > R. \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni x si ha $\|U(x)\| \leq R$. Proviamo che U è compatto. Si vede che $U(x) = F(T(x))$ dove

$$F(y) = \begin{cases} y & \text{se } \|y\| \leq R \\ \frac{yR}{\|y\|} & \text{se } \|y\| > R. \end{cases}$$

L'operatore F è continuo e dal momento che T è compatto quindi anche U è compatto. Consideriamo $B(0, R)$ in X la sfera e denotiamo con K la chiusura dell'involuppo convesso di $U(B(0, R))$, cioè il più piccolo convesso che contiene $U(B(0, R))$. L'insieme K è convesso, chiuso e limitato e quindi possiamo allora applicare il Teorema di Schauder all'applicazione $U: K \rightarrow K$ e dedurre l'esistenza di un punto $x_0 \in K$ tale che $U(x_0) = x_0$. Se proviamo che $\|T(x_0)\| \leq R$ segue che x_0 è anche un punto fisso di T . Supponiamo che $\|T(x_0)\| > R$, allora

$$x_0 = U(x_0) = (R/\|T(x_0)\|)T(x_0),$$

quindi $x_0 \in A$, dal momento che $R/\|T(x_0)\| < 1$. Inoltre

$$\|x_0\| = \|U(x_0)\| = R$$

in contraddizione con la scelta di R in (8.9.22).

Osserviamo, che per applicare il Teorema di Schaefer non è necessario provare che l'insieme di definizione sia convesso o compatto. Il teorema vale se si riesce a provare una *stima a priori* sui possibili punti fissi di λT .

8.10 Applicazione del Teorema di Schaefer alle equazioni differenziali a derivate parziali non lineari

Illustriamo con un esempio come è possibile applicare il Teorema del punto fisso di Schaefer alla risoluzione di equazioni alle derivate parziali. Consideriamo il seguente problema ellittico quasi-lineare

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) + \mu u = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8.10.23)$$

dove Ω è un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2 , μ è un numero reale e $b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione regolare e lipschitziana ed esiste pertanto una costante c_1 tale che per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|b(\xi)| \leq c_1(|\xi| + 1) \quad (8.10.24)$$

vale il seguente teorema di esistenza:

TEOREMA 8.13. – *Se $\mu > 0$ è sufficientemente grande allora esiste una soluzione debole $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ dell'equazione (8.10.23):*

$$\int_{\Omega} Du D\varphi \, dx + \mu \int_{\Omega} u\varphi \, dx = - \int_{\Omega} b(Du)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad (8.10.25)$$

Alla dimostrazione del teorema premettiamo il seguente teorema di esistenza e regolarità per le soluzioni ellittiche lineari, per la cui dimostrazione rimandiamo a Brezis:

TEOREMA 8.14. – *Assegnato il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8.10.26)$$

con Ω è un aperto limitato con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^2 e $f \in L^2(\Omega)$, esiste un'unica soluzione debole $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ di (8.10.26) e vale la seguente maggiorazione:

$$\|w\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (8.10.27)$$

e la costante c_1 dipende da Ω .

Diamo la prova del del Teorema 8.13.

Dimostrazione. Per $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, denotiamo $f = -b(Du)$ e osserviamo che $f \in L^2(\Omega)$ per la condizione (8.10.24). Infatti

$$|f(x)| \leq |b(|Du(x)|)| \leq c_1(1 + |Du(x)|)$$

e, poichè $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, segue che $f \in L^2(\Omega)$. Per questa scelta di f sia $w \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ l'unica soluzione debole del problema, che esiste per il Teorema 8.10.26 di

$$\begin{cases} -\Delta w + \mu w = f = -b(Du) & x \in \Omega \\ w = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (8.10.28)$$

ed inoltre vale la stima:

$$\|w\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_1 \|b(Du)\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2(1 + \|Du\|_{L^2(\Omega)}) \quad (8.10.29)$$

Definiamo quindi l'operatore

$$A: W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$$

tale che

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \text{l'unica soluzione } w \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ del problema (8.10.28)}$$

Da (8.10.29) segue che:

$$\|A(u)\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_2(1 + \|Du\|_{L^2(\Omega)}) \quad (8.10.30)$$

Proviamo che l'operatore A è continuo e compatto.

Sia u_k una successione convergente a u in $W_0^{1,2}$. Definiamo la successione $w_k = A(u_k)$ e dalla stima (8.10.30) e dalla convergenza di Du_k in $L^2(\Omega)$, segue

$$\|w_k\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq c_2(1 + \|Du_k\|_{L^2(\Omega)}) \leq c_3(1 + \|Du\|_{L^2(\Omega)})$$

Dal teorema di immersione negli spazi di Sobolev, dal momento che $W^{2,2}(\Omega)$ è immerso con compattezza in $W_0^{1,2}(\Omega)$, si ha che esiste un'estratta di $\{w_{k_j}\}$ di $\{w_k\}$ convergente nella topologia forte di $W_0^{1,2}(\Omega)$ a w .

D'altra parte ogni w_{k_j} è una soluzione debole del problema (8.10.28) associato a u_{k_j} e dunque

$$\int_{\Omega} (Dw_{k_j} D\varphi + \mu w_{k_j} \varphi) \, dx = - \int_{\Omega} b(Du_{k_j}) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Dalla convergenza della successione w_{k_j} e applicando il teorema della convergenza dominata alla successione $b(Du_{k_j})$, passando al limite, si ottiene

$$\int_{\Omega} (Dw D\varphi + \mu w \varphi) \, dx = - \int_{\Omega} b(Du) \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Quindi w è una soluzione debole del problema (8.10.28) associato a u e dunque $w = A(u)$, si può concludere che la successione $A(u_k) \rightarrow A(u)$ in $W_0^{1,2}$ e quindi A è continuo.

Con un procedimento simile si dimostra che A è compatto. Supponiamo $\{u_k\}$ una successione limitata in $W_0^{1,2}$ e quindi

$$\|A(u_k)\|_{W^{2,2}(\Omega)} = \|w_k\|_{W^{2,2}(\Omega)} \leq C$$

Possiamo allora estrarre una sottosuccessione w_{k_j} convergente nella topologia forte di $W_0^{1,2}$ e quindi che $A(u_{k_j}) = w_{k_j}$ converge in $W_0^{1,2}$.

Infine proviamo che, se μ è sufficientemente grande, l'insieme

$$A = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \left\{ u \in W_0^{1,2}(\Omega) : u = \lambda A(u) \right\}$$

è limitato in $W_0^{1,2}$. Sia $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$u = \lambda A(u), \quad \text{con } 0 < \lambda \leq 1$$

quindi $A(u) = u/\lambda$ è una soluzione debole del problema (8.10.28)

$$-\Delta u + \mu u = -\lambda b(Du).$$

Dalla definizione di soluzione debole, prendendo $\varphi = u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ si ottiene:

$$\int_{\Omega} (Du \cdot Du + \mu u \cdot u) \, dx = -\lambda \int_{\Omega} b(Du) \cdot u \, dx. \quad (8.10.31)$$

Dall'ipotesi (8.10.24) su $b(\xi)$ e dalla disuguaglianza di Cauchy, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b(Du) \cdot u \, dx &\leq c_1 \int_{\Omega} (1 + |Du|) \cdot |u| \, dx \\ &\leq c_1 |\Omega| + C \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx \end{aligned} \quad (8.10.32)$$

Da (8.10.31) segue:

$$\int_{\Omega} |Du|^2 \, dx + \mu \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx + C \int_{\Omega} |u|^2 \, dx + c_1 |\Omega|. \quad (8.10.33)$$

e quindi si ottiene

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 \, dx + (\mu - C) \int_{\Omega} |u|^2 \, dx \leq c_1 |\Omega|$$

con una costante C indipendente da λ . Quindi per μ sufficientemente grande gli elementi dell'insieme A sono limitati nella norma di $W^{1,2}(\Omega)$. Dal Teorema di Schaefer segue che A ha un punto fisso e quindi esiste $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $A(u_0) = u_0$, ovvero u_0 è soluzione debole del problema (8.10.28) e di conseguenza una soluzione del problema (8.10.23) di classe $W^{2,2}(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

1. H. BREZIS, Analyse fonctionnelle, Theorie et applications, *Masson*, (1983).
2. H. BREZIS, Traduzione italiana: Analisi Funzionale, *Liguori Ed.*, (1986).
3. B. DACOROGNA, Introduction to the Calculus of Variations, *Imperial College Press*, (2004).
4. D. GILBARG, N. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, *Springer* (1998).
5. E. GIUSTI, Equazioni ellittiche del secondo ordine, *Pitagora Ed.*, *UMI*, (1978).
6. E. GIUSTI, Metodi diretti nel Calcolo delle Variazioni, *UMI*, (1994).
7. L.C. EVANS, Partial Differential Equations *Graduate Studies in Mathematics* V. 19, (1998).
8. E. KREYSZING, Introductory Functional Analysis with Applications, *John Wiley*, (1989).
9. A. N. KOLMOGOROV-S. V. FOMIN, Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale, *Ed. Mir* (1980).
10. W. RUDIN, Analisi Reale e Complessa, *Bollati Boringhieri, Torino*, (1991).

11. E.ZEIDLER, Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics, *Springer* N. 108, (1995).
12. E.ZEIDLER, Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics, *Springer*, N. 109, (1995).