

Esercizi e Problemi di Analisi Funzionale

Elvira Mascolo

con la collaborazione della Dott.ssa Chiara Barbieri

Dipartimento di Matematica ed Informatica U. Dini

Università di Firenze

11 luglio 2017

Indice

Introduzione	6
1 Breve storia dell'analisi funzionale	7
2 Spazi normati e funzionali lineari	13
2.1 Introduzione	13
2.2 Esercizi	14
3 Principi di analisi lineare	27
3.1 Introduzione	27
3.2 Esercizi	28
4 Topologie deboli	43
4.1 Introduzione	43
4.2 Esercizi	44
5 Spazi di Hilbert ed applicazioni	63
5.1 Introduzione	63
5.2 Esercizi	65
6 Formulazione variazionale per equazioni differenziali	89
6.1 Introduzione	89
6.2 Esercizi	91
Bibliografia	117

Introduzione

L'obiettivo di questi appunti è di presentare la teoria e gli argomenti principali dell'analisi funzionale attraverso la risoluzione di problemi ed esempi, dal momento che l'analisi funzionale, pur avendo una base estremamente teorica, ha molteplici e differenti applicazioni in vari campi scientifici.

L'analisi funzionale è una teoria relativamente recente, nasce infatti all'inizio del 1900, ma si è sviluppata per tutto il secolo e ha permesso di affrontare problemi in numerosi settori della matematica e della fisica. Tra i principali campi di applicazione ricordiamo: le equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, il calcolo delle variazioni, la teoria dell'evoluzione, la teoria dei fluidi e in particolare l'equazione di Navier-Stokes, la teoria dei campi e la meccanica quantistica e lo studio dei metodi di approssimazione in analisi numerica, tra cui il metodo di Ritz e il metodo di Galerkin.

Dal punto di vista didattico la risoluzione di problemi rappresenta un utile strumento per l'apprendimento della materia e motiva lo studio degli argomenti e delle tecniche della teoria e, per la mancanza di un metodo generale di risoluzione, permette di acquisire le capacità di collegare i passaggi semplici per risolvere questioni complesse.

Negli ultimi anni si è persa in parte l'abitudine di assegnare agli studenti esercizi di matematica, sia di base che avanzata, probabilmente impedendo un buon bilanciamento tra la parte teorica e le applicazioni della disciplina e l'acquisizione della necessaria sintesi per lo studio della materia.

La risoluzione di problemi ed esercizi, sia individuale che collettiva, può diventare la motivazione anche per lo studio dell'analisi funzionale ed è un primo passo da compiere per affrontare problemi più difficili, soprattutto per chi è interessato a svolgere ricerca in matematica.

Gli appunti sono così organizzati: nel primo capitolo vi è una breve introduzione storica sulla nascita e sullo sviluppo dell'analisi funzionale. Nei capitoli successivi si presentano alcuni problemi ed esercizi con una introduzione preliminare sugli argomenti trattati. In ogni sezione vengono enunciati i lemmi ed i teoremi utilizzati nella risoluzione degli esercizi.

Osserviamo esplicitamente che gli esercizi proposti non sono completamente originali ma possono essere ritrovati sia su libri di testo sia, nella maggior parte, sui siti web relativi agli argomenti trattati. In questi appunti tutto il materiale è stato raccolto, organizzato, controllato ed, in alcuni casi corretto.

Riteniamo che la raccolta e la presentazione degli esercizi considerati possa essere di grande utilità per chi insegna l'analisi funzionale e per gli studenti che affrontano lo studio di questa affascinante disciplina.

I problemi presentati riguardano argomenti alla base dell'analisi funzionale. Per il libro di testo a cui questi esercizi fanno riferimento rimandiamo a Brezis [2] e [3] e agli appunti del corso di analisi funzionale della Prof.ssa Elvira Mascolo [8].

Capitolo 1

Breve storia dell'analisi funzionale

L'analisi matematica si sviluppa nel XVII secolo con le teorie sul calcolo differenziale di Newton e Leibniz. Il concetto di funzione di una variabile reale comincia ad evolversi durante i due secoli successivi attraverso il lavoro di matematici come Eulero, Lagrange, Weierstrass e Cauchy, fino a che alla fine del XIX secolo non viene enunciata da Dirichlet quella che può essere considerata la prima definizione “moderna” di funzione definita su un intervallo reale $[a, b]$.

In questo periodo l'interesse dei matematici è rivolto principalmente alla risoluzione di equazioni differenziali ed integrali ed alla ricerca di massimi e minimi di funzionali del calcolo delle variazioni, argomenti che ben si prestano a risolvere questioni di natura fisica.

Dal momento che le incognite da determinare non sono più numeri reali, ma funzioni di una variabile reale, nasce l'esigenza di trattare le funzioni come “oggetti primitivi”, ovvero come punti di uno opportuno spazio. È in questo contesto che si sviluppa l'analisi funzionale, che ha come oggetto di studio spazi i cui elementi sono funzioni, quindi di dimensione infinita, tra i quali possono agire applicazioni detti operatori, o funzionali se lo spazio di arrivo è l'insieme dei numeri reali.

Per poter costruire una opportuna teoria è stato necessario organizzare questi spazi in modo da poterne studiare le proprietà da un punto di vista matematico. Ciò è stato possibile definendo su di essi una distanza, ovvero un modo per poter stabilire quanto le funzioni, viste come elementi dello spazio, si differenziano tra di loro. La definizione di una distanza ha permesso inoltre di generalizzare alcune proprietà della geometria elementare ad insiemi di differente natura.

Ricordiamo le parole del matematico Ennio De Giorgi [4]:

La grande opera dei matematici del XX secolo è stata precisamente quella di studiare la struttura geometrica di tali spazi, di vedere che in questi spazi i cui elementi sono funzioni, si possono trasferire molti

concetti, come quello di “geodetica” o quello di “linea di livello”, propri della geometria elementare. Ciò ha creato, da un lato, un certo bagaglio di teorie, dall’altro, una specie d’intuizione spaziale generale, per cui il matematico di talento, ad un certo punto, vede questi spazi ad infinite dimensioni con la stessa naturalezza ed in modo abbastanza simile a quello con cui il matematico classico vedeva le figure del piano e dello spazio ordinario. Poi, naturalmente, accanto a questa visione più intuitiva, c’è la formalizzazione della teoria degli spazi metrici, che avviene attraverso una serie di assiomi abbastanza naturali ed anche attraverso un formalismo più o meno complicato, a seconda del livello di raffinatezza che si vuole raggiungere nella teoria.

A partire dalla metà del XIX secolo Riemann (1826-1866), nella sua tesi di dottorato, fa già riferimento ad un’idea di spazio di funzioni.

Si può affermare che l’origine dell’analisi funzionale propriamente detta risieda in Italia. Nella seconda metà del XIX secolo infatti vi è un grande sviluppo della creatività dei matematici italiani, tra cui ricordiamo: Giulio Ascoli (1843-1896), Cesare Arzelà (1847-1912), Ulisse Dini (1845-1918), Giuseppe Peano (1858-1932), Salvatore Pincherle (1853-1936) e Vito Volterra (1860-1940).

La teoria dei funzionali viene avviata alla fine del XIX secolo da Volterra, che si occupa in particolare di equazioni integrali. Volterra considera una particolare classe di funzionali definiti nella classe delle funzioni continue a valori reali, cioè delle curve continue.

Osserviamo che in questo primo periodo l’interesse dei matematici è rivolto alle applicazioni pratiche in problemi concreti piuttosto che agli aspetti teorici.

Durante il primo Congresso internazionale dei matematici tenuto a Zurigo nel 1897, il matematico francese Jacques Hadamard (1865-1963), influenzato dalla recente teoria degli insiemi di Cantor, è il primo a considerare, da un punto di vista teorico, insiemi i cui elementi sono oggetti di natura arbitraria come le curve o funzioni definite su insiemi qualsiasi. Il termine “analisi funzionale” ha origine proprio con Hadamard, che nel 1912 pubblica un articolo su “le calcul fonctionelle” in *L’Enseignement Mathématique* [Hadamard, 1968, Ouvres. 4, Paris: CNRS, 2253-2266] in cui scrive sull’aspetto della dimensione infinita di tali spazi:

...non offre una facile visualizzazione al nostro spirito... L’intuizione geometrica non ci insegna niente a priori. Siamo costretti a rimediare a questa incapacità, e possiamo farlo solo analiticamente, creando per le applicazioni un’opportuna teoria. Se si vuole continuare a seguire, per le funzioni, lo stesso percorso che è stato fatto per i numeri, rimarrà da:

1. pensare alle funzioni stesse, non definite in modo specifico, ma come enti che possono variare;
2. sottoporre le funzioni, non solo a due o tre operazioni certe ma a operazioni più o meno arbitrarie.

La branca della matematica il cui obiettivo è quello appena descritto è quella che oggi viene chiamata calcolo funzionale [calcul fonctionnelle]. Segue dalle considerazioni precedenti che in esso si dovrebbe vedere il seguito e la naturale conseguenza del calcolo infinitesimale stesso, e delle idee correnti al quale ha dato vita.

Alla fine dell'Ottocento un altro tra i più grandi matematici di tutti i tempi, David Hilbert (1862-1943) si affaccia sulla scena portando avanti studi sulla teoria delle equazioni integrali. Nel 1908 Hilbert, nel IV Congresso dei matematici di Roma, descrive il suo approccio alla teoria spettrale come un tentativo di unificare i vari metodi utilizzati per trattare l'algebra, l'analisi e la geometria. I problemi dell'analisi dovevano essere affrontati in maniera analoga a quelli algebrici, con la differenza che in analisi il numero delle incognite da considerare è infinito.

Un primo tentativo di costruzione di una teoria astratta è da attribuire a Fréchet (1878-1973), che nel 1906 introduce la nozione di spazio metrico ed i concetti di compattezza, completezza e separabilità nel contesto degli spazi di funzioni. Fréchet sviluppa e generalizza le idee sui funzionali lineari di Hadamard e Volterra.

Sempre in quegli anni Schmidt (1876-1959) introduce il linguaggio geometrico che usiamo comunemente per descrivere gli spazi di Hilbert in termini dello spazio ℓ^2 delle successioni reali (x_n) tali che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

In particolare Schmidt considera le funzioni e le successioni come vettori di uno spazio infinito-dimensionale su cui è definito un prodotto interno, una norma e la nozione di ortogonalità.

Agli inizi del XX secolo si assiste anche ad un potenziamento della teoria delle funzioni di una variabile reale, soprattutto nel campo dell'integrazione con la nuova teoria della misura di Lebesgue. Sotto la sua influenza Riesz (1880-1956) dimostra che lo spazio L^2 delle funzioni a quadrato sommabile che è completo e separabile, è isomorfo allo spazio di Hilbert ℓ^2 . Inoltre, sia Fréchet che Riesz ottengono, indipendentemente l'uno dall'altro, il teorema di rappresentazione per funzionali lineari e continui in L^2 , risultato che poi Riesz stesso generalizzerà al caso di spazi di Hilbert generici. Riesz si occupa inoltre della generalizzazione agli spazi L^p con

$p > 1$ delle funzioni $u(x)$ tali che

$$\int |u(x)|^p dx < +\infty,$$

estendendo risultati già raggiunti da Schmidt sugli spazi di Hilbert.

Nel corso del primo trentennio del Novecento cresce la consapevolezza che questa branca nascente dell'analisi potesse rappresentare uno strumento flessibile per trattare molti problemi della fisica ed in particolare nell'ambito della meccanica quantistica. È in questo contesto che l'analisi funzionale raggiunge un maggior livello di astrazione e di assiomatizzazione grazie ai contributi di Von Neumann e Banach.

John Von Neumann (1903-1957), interessato a questioni di meccanica quantistica, mostra l'applicabilità dell'analisi funzionale al campo della fisica matematica. Intorno al 1927 riprende le idee di Hilbert e studia le applicazioni della teoria spettrale degli operatori lineari e limitati. Neumann si rende conto che una teoria basata esclusivamente sugli operatori limitati non è adeguata per la meccanica quantistica, quindi sviluppa una teoria sugli operatori anche non limitati; successivamente introduce una prima definizione assiomatica di spazio di Hilbert, di cui gli spazi ℓ^2 e L^2 rappresentano il modello separabile.

Ma il lavoro di Banach è senza dubbio il più significativo. Intorno al 1920, Stefan Banach (1892-1945), riprendendo i lavori di Volterra, Hadamard, Fréchet e Riesz, dà una definizione assiomatica di norma su uno spazio vettoriale, concetto già presente in parte anche nei lavori di Riesz, Helly, Wiener e fonda una vera e propria teoria degli spazi normati e in particolare degli spazi di Banach (con l'aggiunta dell'ipotesi di completezza allo spazio). Successivamente studia e sviluppa alcune idee relative agli spazi duali già introdotti da Hahn (1879-1934).

L'importanza del contributo di Banach consiste nell'aver sviluppato una teoria sistematica dell'analisi funzionale e nell'aver riunito in essa i contributi dei matematici precedenti, che prima erano solamente una serie di risultati isolati. A Banach attribuiamo alcuni tra i teoremi più importanti sugli spazi normati, alla base dell'analisi funzionale, tra cui il teorema di Hahn-Banach di estensione dei funzionali lineari e continui, il teorema di Banach-Steinhaus sulla limitatezza uniforme per operatori lineari e continui su spazi di Banach, il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki sulla compattezza della sfera unitaria nello spazio duale e il teorema delle contrazioni di Banach.

Successivamente, l'analisi funzionale riceve un nuovo impulso con le ricerche del matematico russo S. Sobolev (1908-1989), che pone le basi per una nuova teoria, detta delle distribuzioni, che generalizza il concetto di funzione ed è strettamente connessa con la meccanica quantistica. Sobolev introduce nuovi spazi costituiti dalle funzioni appartenenti allo spazio L^p dotate di un particolare tipo di deri-

vata, la derivata debole, anch'essa in L^p . La teoria delle distribuzioni verrà poi formalizzata nel 1945 dal matematico francese L.Schwartz (1915-2002).

L'analisi funzionale, con i contributi di Von Neumann e Banach, raggiunge quindi un elevato livello di assiomatizzazione e generalità e la teoria degli spazi di Hilbert che era stata già formulata durante i decenni precedenti trova in essa piena collocazione.

Bisogna osservare che probabilmente il grado di generalizzazione e di astrazione rappresenta l'aspetto predominante della matematica del XX secolo, tuttavia le nozioni astratte stabilite e studiate in questo periodo hanno poi svolto un ruolo fondamentale nella ricerca applicata. Negli ultimi 50 anni lo sviluppo dell'analisi funzionale, diversificandosi in molteplici direzioni, ha finito per interessare tutti gli aspetti della matematica e della fisica teorica.

Capitolo 2

Spazi normati e funzionali lineari

2.1 Introduzione

In questo capitolo affrontiamo problemi relativi a spazi vettoriali di dimensione infinita, i cui elementi potrebbero essere ad esempio successioni di numeri reali o funzioni, sui quali si introducono delle *norme*, dunque delle metriche, che definiscono una topologia che può essere interamente studiata attraverso le successioni. Tali strutture prendono il nome di *spazi normati*. Tra questi spazi quelli che sono completi rispetto ad una data norma si dicono *spazi di Banach*.

In dimensione infinita possono venire meno proprietà che erano vere in dimensione finita, come la completezza degli spazi rispetto alle loro norme, l'equivalenza delle norme definite su uno stesso spazio, o ancora la compattezza per successioni delle palle chiuse.

Dato uno spazio normato X , si definisce poi il suo *spazio duale* X^* (che è sempre uno spazio di Banach) come l'insieme dei *funzionali* $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineari e continui su X . Il principale risultato riguardante i funzionali lineari e continui è il teorema di Hahn-Banach, dal quale si deduce come prima conseguenza che lo spazio duale di uno spazio normato non banale è anche esso non banale, permettendo di costruire una opportuna teoria degli spazi duali.

Enunciamo di seguito i principali teoremi a cui faremo riferimento.

Teorema 2.1 (Hahn-Banach in spazi normati). *Sia X uno spazio normato e G un suo sottospazio. Ogni funzionale g lineare e continuo definito in G si prolunga in un funzionale lineare e continuo in X tale che*

$$\|F\|_{X^*} = \|g\|_{G^*}.$$

Corollario 2.2. *Sia L un sottospazio vettoriale di X spazio normato e $x_0 \in X \setminus L$. Esiste un funzionale lineare e continuo F su X tale che $F(x) = 0$ per ogni $x \in L$ ed inoltre $\|F\|_{X^*} = 1$ e $F(x_0) = \text{dist}(x_0, L) = \inf_{x \in L} \|x - x_0\|$.*

Ricordiamo che un *iperpiano chiuso* è un insieme della forma $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e f un funzionale lineare e continuo su X . Dati $A, B \subset X$ diremo che l'iperpiano H di equazione $f(x) = \alpha$ *separa A e B in senso largo* se $f(x) \leq \alpha$ per ogni $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha$ per ogni $x \in B$. Diremo che l'iperpiano H *separa A e B in senso stretto* se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ per ogni $x \in A$ e $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$ per ogni $x \in B$.

Teorema 2.3 (Hahn-Banach in forma geometrica). *Siano $A, B \subset X$ due insiemi convessi, non vuoti e disgiunti di uno spazio normato X con A aperto in X . Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso largo.*

Teorema 2.4 (Stretta separazione dei convessi). *Siano $A, B \subset X$ due insiemi convessi, non vuoti e disgiunti di uno spazio normato X . Supponiamo che A sia chiuso e B sia compatto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso stretto.*

Ricordiamo infine che uno spazio normato X si dice *uniformemente convesso* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ con $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$, risulta $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$.

Teorema 2.5 (Milman). *Ogni spazio di Banach uniformemente convesso è riflessivo.*

2.2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Tutte le norme definite su $\mathbb{R}^N$ sono equivalenti.*

Dimostrazione. Sia $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i \in \mathbb{R}^N$, dove e_i è l'elemento i -esimo della base canonica di $\mathbb{R}^N$ e $x_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Consideriamo la norma euclidea su $\mathbb{R}^N$ definita da $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Dal momento che l'equivalenza tra norme gode della proprietà transitiva, basta dimostrare che per ogni norma $\|\cdot\|$ definita su $\mathbb{R}^N$, $\|\cdot\|$ è equivalente alla norma euclidea.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^N$ si ottiene

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^N |x_i| \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posto $M = \left(\sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ si ha

$$\|x\| \leq M\|x\|_2, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N.$$

Proviamo che $\|\cdot\|$ è una funzione continua rispetto alla topologia indotta dalla norma euclidea su $\mathbb{R}^N$. Per la disuguaglianza triangolare inversa vale

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq M\|x - y\|_2,$$

e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ con $\|x - y\|_2 < \delta$, $|\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$.

Sia ora $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_2 = 1\}$. Dal momento che S è compatto in $\mathbb{R}^N$ rispetto alla topologia indotta dalla norma euclidea, per il teorema di Weierstrass $\|\cdot\|$ ammette minimo in S , cioè esiste $x_0 \in S$ tale che $m = \|x_0\| \leq \|x\|$ per ogni $x \in S$. Osserviamo inoltre che $m > 0$ poiché $0 \notin S$.

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ con $x \neq 0$

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_2},$$

da cui segue che $m\|x\|_2 \leq \|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ (vale infatti anche per $x = 0$). Si conclude che

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^N,$$

cioè $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti. □

Osservazione. Il risultato vale più in generale per ogni spazio di dimensione finita.

Esercizio 2.2. Sia F un funzionale lineare su $\mathbb{R}^N$. Allora F è un'applicazione continua.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ una base ortonormale per $\mathbb{R}^N$. È immediato osservare che $\mathcal{B}$ è contenuta nella palla unitaria

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_2 \leq 1\},$$

dove $\|\cdot\|_2$ indica la norma euclidea su $\mathbb{R}^N$. Sia $v \in B$; esistono N numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tali che $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i$ ed inoltre $|\lambda_i| \leq 1$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Consideriamo $|F(v)|$. Per quanto osservato segue che

$$|F(v)| = \left| \sum_{i=1}^N \lambda_i F(e_i) \right| \leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| |F(e_i)| \leq Nm,$$

dove m è il massimo tra i valori che F assume sugli elementi della base $\mathcal{B}$, cioè $m = \max_{i=1, \dots, N} |F(e_i)|$. Si può concludere che il funzionale F è limitato sulla palla unitaria B e quindi è ivi continuo. Segue per linearità la continuità in tutto lo spazio $\mathbb{R}^N$. $\square$

Osservazione 1. *Il risultato vale più in generale per ogni operatore lineare definito su $\mathbb{R}^N$ a valori in uno spazio vettoriale qualunque dotato di una qualche topologia τ .*

Osservazione 2. *Il risultato può essere esteso ad operatori definiti da uno spazio vettoriale di dimensione finita ad uno spazio vettoriale qualunque, dotato di una qualche topologia τ .*

Dimostrazione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita N e sia $\{v_1, \dots, v_N\}$ una sua base. Per ogni $v \in V$ esistono N numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ tali che $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i$. Rimane definito naturalmente un isomorfismo fra spazi vettoriali $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo

$$\Phi(v) = \Phi \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i,$$

dove $\{e_1, \dots, e_N\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^N$.

Su V si può inoltre definire una norma $\|\cdot\|_V$ ponendo, per ogni $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i \in V$, $\|v\|_V = \sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2}$. Così facendo, la Φ definita in precedenza risulta anche un omeomorfismo fra spazi topologici (considerando su $\mathbb{R}^N$ l'usuale topologia euclidea).

Sia adesso W spazio vettoriale qualsiasi, dotato di una qualche topologia τ e $F : V \longrightarrow W$ un operatore lineare; $F \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^N \longrightarrow W$ è ancora un operatore lineare e quindi continuo per la precedente osservazione. Essendo anche Φ continuo, si conclude la continuità dell'operatore $F \circ \Phi^{-1} \circ \Phi = F$. $\square$

Esercizio 2.3. *Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione infinita. Allora esiste un funzionale lineare su X che non è continuo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una base per X , dove $\mathcal{I}$ è un insieme di indici. Possiamo supporre senza perdere di generalità che $\|x_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in \mathcal{I}$. Cerchiamo un funzionale $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia lineare e non limitato. In realtà è sufficiente che non sia limitato su un sottoinsieme numerabile della base $\mathcal{A}$.

Consideriamo quindi un insieme numerabile di indici $\mathcal{Q}$ che sia contenuto in $\mathcal{I}$. Si può supporre $\mathcal{Q} = \mathbb{N} \subset \mathcal{I}$. Definiamo il funzionale F sugli elementi della base $\mathcal{A}$ come segue:

$$F(x_\alpha) = \begin{cases} n, & \text{se } \alpha \in \mathbb{N}, \alpha = n; \\ 0, & \text{se } \alpha \in \mathcal{A} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Estendiamo adesso la definizione di F a tutto lo spazio X in modo lineare. Ogni elemento dello spazio X è espresso come combinazione lineare finita di elementi della base $\mathcal{A}$, quindi fissato $v \in X$ esistono un insieme finito di indici $I = \{i_1 \dots i_N\}$ contenuto in $\mathcal{I}$ e dei numeri reali c_α tali che

$$v = \sum_{\alpha \in \{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_N}\}} c_\alpha x_\alpha.$$

Si definisce allora, su tutto X ,

$$F(v) = \sum_{\alpha \in \{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_N}\}} c_\alpha F(x_\alpha).$$

Dalla definizione segue che F è lineare ed inoltre non è limitato. Infatti si considerino gli elementi della base $\mathcal{A}$ del tipo x_n con $n \in \mathbb{N}$; se esistesse $C > 0$ tale che $|F(x_n)| \leq C\|x_n\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe $n \leq C$ per ogni n , da cui seguirebbe l'assurdo. $\square$

Esercizio 2.4. *Sullo spazio $C^0([a, b])$ delle funzioni definite e continue sull'intervallo $[a, b]$ si considerino le norme*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \quad e \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

per ogni $f \in C^0([a, b])$. Provare che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti.

Dimostrazione. Questo esercizio mostra che in spazi normati a dimensione infinita due qualsiasi norme definite sullo stesso spazio non sono necessariamente equivalenti. Ciò è vero invece in tutti gli spazi normati a dimensione finita (vedi esercizio 2.1).

Sia $f \in C^0([a, b])$, allora

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b - a)\|f\|_\infty.$$

Consideriamo la successione di funzioni in $C^0([a, b])$ così definite:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n(x - a), & \text{se } x \in [a, a + \frac{1}{n}]; \\ 0, & \text{se } x \in [a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Si ha che $\|f_n\|_\infty = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, mentre

$$\|f_n\|_1 = \int_a^b |f_n(x)| dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f_n(x)| dx \leq \frac{1}{2n},$$

dunque $\|f_n\|_1$ converge a 0 per n tendente all'infinito, da cui segue che non può esistere una costante $C > 0$ tale che $\|f_n\|_1 \geq C\|f_n\|_\infty = C$ per ogni n . Si conclude che le due norme non sono equivalenti. $\square$

Esercizio 2.5. Si consideri lo spazio $C^1([a, b])$ delle funzioni definite e continue su $[a, b]$ che ammettono derivata continua in $[a, b]$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} = |f(a)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| = |f(a)| + \|f'\|_\infty,$$

dove $\|\cdot\|_\infty$ indica la norma del sup definita su $C^0([a, b])$.

(1) Provare che $C^1([a, b])$ con questa norma è uno spazio di Banach.

(2) Si definisca sullo stesso spazio la norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty;$$

provare che $\|\cdot\|_{C^1}$ e $\|\cdot\|$ sono equivalenti.

(3) Provare che la norma $\|\cdot\|_\infty$ indotta su $C^1([a, b])$ dalla norma $\|\cdot\|_\infty$ definita su $C^0([a, b])$ non è equivalente a $\|\cdot\|_{C^1}$.

(4) Provare che il funzionale lineare $g : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(u) = u'(0)$ non è continuo (rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$).

Dimostrazione. (1) Proviamo che $C^1([a, b])$ è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_{C^1}$. Sia (f_n) una successione di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m > n_0$ si ha $\|f_n - f_m\|_{C^1} < \varepsilon$, ovvero

$$|f_n(a) - f_m(a)| + \|f'_n - f'_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Allora (f'_n) è di Cauchy in $C^0([a, b])$, che è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$, e la successione numerica $f_n(a)$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Dunque f'_n converge uniformemente ad una funzione $g \in C^0([a, b])$ (g è continua in quanto limite uniforme di una successione di funzioni continue) e $f_n(a)$ converge ad un certo $l \in \mathbb{R}$.

Proviamo che f_n converge in norma C^1 a $f(x) = l + \int_a^x g(t)dt$, che è di classe C^1 dal momento che g è continua. Per quanto affermato sulla convergenza delle successioni f'_n e $f_n(a)$ vale

$$\|f_n - f\|_{C^1} = |f_n(a) - l| + \|f'_n - g\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Si conclude che f_n converge in $C^1([a, b])$ che è quindi completo.

(2) Consideriamo ora $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ e proviamo che $\|\cdot\|$ è equivalente a $\|\cdot\|_{C^1}$. Sia $x \in [a, b]$, allora $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$, e da evidenti maggiorazioni otteniamo

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + \int_a^x |f'(t)|dt \leq |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt \leq \\ &\leq |f(a)| + \int_a^b \|f'\|_\infty dt = |f(a)| + (b-a)\|f'\|_\infty. \end{aligned}$$

Passando al sup su $[a, b]$ si ottiene che

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + (b-a)\|f'\|_\infty,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|f\| &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq |f(a)| + (1+b-a)\|f'\|_\infty < \\ &< (1+b-a)[|f(a)| + \|f'\|_\infty] = (1+b-a)\|f\|_{C^1}. \end{aligned}$$

L'altro verso della disuguaglianza segue banalmente dalla definizione di $\|\cdot\|$.

(3) La norma $\|\cdot\|_\infty$ indotta da $C^0([a, b])$ su $C^1([a, b])$ non è equivalente a $\|\cdot\|_{C^1}$. Se $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_{C^1}$ fossero equivalenti, per quanto dimostrato al punto (1), $C^1([a, b])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ sarebbe un sottospazio completo di $C^0([a, b])$. Allora sarebbe anche chiuso in C^0 , e non può esserlo dal momento che è un sottospazio proprio di denso in C^0 .

(4) Consideriamo infine il funzionale $g : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $g(u) = u'(0)$ per ogni $u(t) \in C^1([a, b])$, e facciamo vedere che non è limitato in un intorno dello 0. Prendiamo la successione $u_n(t) = \sin nt$; per ogni n si ha $u'_n(t) = n \cos nt$, per cui $|u'_n(0)| = n$, mentre $\|u_n\|_\infty = 1$, da cui segue che non può esistere $c > 0$ tale che $|g(u_n)| = |u'_n(0)| \leq c\|u_n\|_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 2.6. Sia $C^0([0, 1])$ lo spazio delle funzioni definite e continue sull'intervallo $[0, 1]$ con la norma del sup $\|\cdot\|_\infty$. Consideriamo

$$E = \{u \in C^0([0, 1]) : u(0) = 0\},$$

e definiamo $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $g(u) = \int_0^1 u(t)dt$.

(1) Dimostrare che $g \in E^*$ e calcolare $\|g\|_{E^*}$.

(2) Verificare se esiste $u \in E$ tale che $\|u\|_\infty = 1$ e $g(u) = \|g\|_{E^*}$.

Dimostrazione. (1) La linearità di g segue dalle proprietà di linearità dell'integrale, mentre la continuità si ottiene dalla relazione

$$|g(u)| \leq \int_0^1 |u(t)| dt \leq \|u\|_\infty.$$

Tramite semplici maggiorazioni e usando la definizione di norma duale, si deduce che

$$\|g\|_{E^*} = \sup_{u \neq 0} \frac{|g(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1.$$

Proviamo che vale l'uguaglianza. Consideriamo la successione $u_n(t) = t^{\frac{1}{n}} \in E \setminus \{0\}$ per ogni n ; è facile verificare che

$$\frac{|g(u_n)|}{\|u_n\|_\infty} \rightarrow 1 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (2.1)$$

e ciò prova che $\|g\|_{E^*} = 1$.

(2) Vediamo se esiste $u \in E$ tale che $\|u\|_\infty = 1$ e $g(u) = 1$. La risposta è negativa in quanto, se tale u esistesse, avremmo che $g(u) = \|u\|_\infty$ e quindi

$$\int_0^1 [\|u\|_\infty - u(t)] dt = 0;$$

di conseguenza, essendo $u(t) \leq \|u\|_\infty$ per ogni $t \in [0, 1]$, si avrebbe $u(t) = \|u\|_\infty = 1$ per quasi ogni $t \in [0, 1]$, quindi per continuità in ogni $t \in [0, 1]$. In particolare si avrebbe $u(0) = 1$ contro il fatto che $u \in E$. $\square$

Esercizio 2.7. Sia X uno spazio normato e definiamo l'operatore $T : X \rightarrow B(0, 1)$ tale che

$$T(x) = \begin{cases} x, & \text{se } \|x\| \leq 1; \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{se } \|x\| > 1. \end{cases}$$

L'operatore T è detto proiezione radiale sulla palla unitaria $B(0, 1)$. Provare che vale $\|T(x) - T(y)\| \leq 2\|x - y\|$ per ogni $x, y \in X$ e che la costante di Lipschitzianità non può essere migliorata.

Dimostrazione. Distinguiamo tre casi:

- siano $x, y \in B(0, 1)$. Allora banalmente $T(x) = x$ e $T(y) = y$ e la relazione $\|T(x) - T(y)\| \leq 2\|x - y\|$ è ovviamente soddisfatta;

- sia $x \in B(0, 1)$ e $y \in X \setminus B(0, 1)$. In questo caso

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &\leq \\
&\leq \left\| x - \frac{x}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{1}{\|y\|} \|x\| \|y\| - \|x\| + \frac{1}{\|y\|} \|x - y\| < \\
&< \left\| x\|y\| - x \right\| + \|x - y\| = \|x\|(\|y\| - 1) + \|x - y\| = \\
&= \|x\|\|y\| - \|x\| + \|x - y\| \leq \|y\| - \|x\| + \|x - y\| \leq \\
&\leq 2\|x - y\|,
\end{aligned}$$

dal momento che $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| > 1$;

- se $x, y \notin B(0, 1)$ poiché valgono sia $\|x\| \geq 1$ che $\|y\| \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\| &\leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x}{\|y\|} \right\| + \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \\
&\leq \|x\| \frac{\|y\| - \|x\|}{\|x\|\|y\|} + \|x - y\| = \\
&= \frac{\|y\| - \|x\|}{\|y\|} + \|x - y\| \leq \\
&\leq 2\|x - y\|.
\end{aligned}$$

Proviamo infine che la costante di Lipschitzianità non può essere migliorata. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ e due punti $x = (0, 1)$ e $y = (\varepsilon, 1)$, con $\varepsilon > 0$, le cui norme sono rispettivamente 1 e $1 + \varepsilon$. Allora $T(x) = x$ e $T(y) = (\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1+\varepsilon})$, da cui $\|T(x) - T(y)\| = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{2}{1+\varepsilon} \|x - y\|$. Dal momento che la scelta di ε è arbitraria segue la tesi. $\square$

Osservazione. Facciamo una considerazione sugli spazi normati sui quali è definito un prodotto scalare, il cui studio verrà affrontato nel capitolo 5 dedicato agli spazi di Hilbert.

Se la norma è associata ad un prodotto scalare, si può dire che T è un operatore di proiezione su un convesso chiuso, dunque vale $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$.

È interessante inoltre notare che non ci sia bisogno dell'ipotesi di completezza dello spazio rispetto a questa norma per poter concludere che la proiezione così definita su $B(0, 1)$ esista. Infatti

$$\min_{x \in B(0,1)} \|z - x\| = \min_{x \in B(0,1)} (z - x, z - x) = \min_{x \in B(0,1)} \{(x, x) - 2(x, z)\}$$

e quindi:

- dato un elemento x non parallelo a z se ne trova uno parallelo e con stessa norma (precisamente $y = z \frac{\|x\|}{\|z\|}$) tale che la quantità $(x, x) - 2(x, z)$ sia maggiore di $(y, y) - 2(y, z)$;
- sugli elementi paralleli si raggiunge il minimo su $B(0, 1)$ quando questi hanno norma unitaria.

Esercizio 2.8. Siano L uno spazio vettoriale normato e $f \in L^* \setminus \{0\}$ un funzionale lineare e continuo definito su L . Dimostrare che

$$\|f\|_{L^*} = \frac{1}{\text{dist}(0, H)},$$

dove H è l'iperpiano $\{x \in L : f(x) = 1\}$

Dimostrazione. Osserviamo che

$$\text{dist}(0, H) = \inf_{x \in H} \|x\|.$$

Si deve quindi dimostrare che

$$\frac{1}{\|f\|_{L^*}} = \inf_{x \in H} \|x\|.$$

Per prima cosa proviamo che $\frac{1}{\|f\|_{L^*}} \leq \|x\|$ per ogni $x \in H$.

Utilizzando la definizione di norma nello spazio duale e alcune evidenti minorazioni, segue che

$$\|f\|_{L^*} = \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{1}{\|x\|} \geq \frac{1}{\|x\|} \quad \forall x \in H,$$

e quindi $\frac{1}{\|f\|_{L^*}} \leq \|x\|$. Ci resta da dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in H$ tale che

$$\|x\| \leq \frac{1}{\|f\|_{L^*}} + \varepsilon.$$

Osserviamo che, poiché f non è il funzionale identicamente nullo, H non è vuoto.

Fissiamo $x_0 \in H$, allora per ogni $x \in L$ si ha che $x - f(x)x_0 \in \ker f$ e quindi ogni $x \in L$ può essere scritto nella forma $\lambda x_0 + y$ per qualche $y \in \ker f$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Poiché $f(x) = 0$ per ogni $x \in \ker f$, segue che $\|f\|_{L^*} = \sup_{x \in L \setminus \ker f} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$, quindi

$$\frac{1}{\|f\|_{L^*}} = \inf_{x \in L \setminus \ker f} \frac{\|x\|}{|f(x)|}.$$

Per definizione si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in L \setminus \ker f$ tale che

$$\frac{\|x_\varepsilon\|}{|f(x_\varepsilon)|} < \frac{1}{\|f\|_{L^*}} + \varepsilon.$$

Essendo $x_\varepsilon = \lambda_\varepsilon x_0 + y_\varepsilon$ per $\lambda_\varepsilon \neq 0$ e $y_\varepsilon \in \ker f$, vale

$$\frac{\|\lambda_\varepsilon x_0 + y_\varepsilon\|}{|\lambda_\varepsilon|} < \frac{1}{\|f\|_{L^*}} + \varepsilon$$

che è quanto volevamo dimostrare, essendo $x_0 + \frac{y_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon} \in H$. $\square$

Esercizio 2.9. Sia L uno spazio vettoriale normato. Fissati $x_1, \dots, x_n$ in L e $c_1, \dots, c_n$ in $\mathbb{R}$, dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) esiste $F \in L^*$ tale che $\|F\|_{L^*} \leq 1$ e $F(x_j) = c_j$ per $j = 1, \dots, n$;
- (ii) per ogni scelta di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{R}$ si ha

$$|\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n| \leq \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|.$$

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Dalle ipotesi discende direttamente che per ogni scelta di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ risulta

$$\begin{aligned} |\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n| &= |\lambda_1 F(x_1) + \dots + \lambda_n F(x_n)| \leq \\ &\leq \|F\|_{L^*} \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\| \leq \|\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n\|. \end{aligned}$$

Proviamo che (ii) implica (i). Sia G il sottospazio di L generato da $x_1, \dots, x_n$ e definiamo $g(x_j) = c_j$. Per ogni $y \in G$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$; poniamo $g(y) = \sum_{k=1}^n \lambda_k g(x_k) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$. Allora

$$\|g\|_{G^*} = \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \frac{|g(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k)|}{\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\|} = \sup_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \frac{|\sum_{k=1}^n \lambda_k c_k|}{\|\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\|} \leq 1.$$

Dal teorema di Hahn-Banach 2.1 segue che esiste $F \in L^*$ prolungamento di g tale che $\|F\|_{L^*} = \|g\|_{G^*}$, per cui $\|F\|_{L^*} \leq 1$ e $F(x_j) = c_j$ per $j = 1, \dots, n$. $\square$

Esercizio 2.10. Sia X uno spazio vettoriale normato e sia $x_0 \neq 0$ un elemento di X . Allora esiste un funzionale lineare e continuo su X tale che: $F(x_0) = \|x_0\|$ e $\|F\|_{X^*} = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo il sottospazio W di X generato dall'elemento x_0 . Sia g il funzionale lineare e continuo definito su W da $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Hahn-Banach 2.1 segue che si può estendere g su tutto lo spazio X

con un funzionale F lineare e continuo tale che $\|F\|_{X^*} = \|g\|_{W^*}$. Quindi $F(x_0) = \|x_0\|$ e inoltre

$$\|F\|_{X^*} = \sup_{y \in W \setminus \{0\}} \frac{|g(y)|}{\|y\|} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda| \|x_0\|}{\|\lambda x_0\|} = 1$$

□

Osservazione. Ciò assicura che lo spazio duale di uno spazio vettoriale normato non banale è non banale.

Esercizio 2.11. Sia X uno spazio vettoriale normato e Y un suo sottospazio. Allora esiste un funzionale lineare e continuo definito su X diverso dal funzionale nullo che si annulla in Y .

Dimostrazione. Fissiamo x_0 in $X \setminus \overline{Y}$. Sicuramente $x_0 \neq 0$ dal momento che $0 \in Y$. Per il teorema di stretta separazione dei convessi 2.4 esiste quindi un funzionale F lineare e continuo in X , diverso dal funzionale nullo, tale che per ogni x in Y si ha

$$F(x) < \alpha < F(x_0),$$

con $\alpha > 0$ dato che $0 \in Y$. Si fissi un elemento x di Y . Dal momento che Y è un sottospazio vettoriale di X , si ha che comunque scelto $t \in \mathbb{R}$, $tx \in Y$, e $F(tx) = tF(x) < \alpha$. Segue che $F(x) = 0$ per ogni x in Y . □

Osservazione. Nel caso in cui Y è denso in X la tesi non vale, ossia, dato $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo tale che F sia nullo su Y , allora F è necessariamente il funzionale nullo.

Dimostrazione. Dall'ipotesi di densità segue che per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in Y$ tale che $\|x - y\| < \varepsilon$. Quindi

$$|F(x)| \leq |F(x) - F(y)| + |F(y)| = |F(x - y)|,$$

dove si è usata la linearità di F e l'ipotesi che F sia nullo su Y . Sfruttando infine la continuità di F e la densità di Y in X si ottiene

$$|F(x - y)| \leq C\|x - y\| < C\varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $F(x) = 0$ e dall'arbitrarietà di $x \in X$ segue la tesi. □

Esercizio 2.12. Nel Teorema di Hahn-Banach in forma geometrica l'ipotesi di apertura di uno dei due insiemi non può essere eliminata.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ il sottospazio di $C^0([0, 1])$ dei polinomi a coefficienti reali definiti nell'intervallo $[0, 1]$.

È interessante osservare che $\mathcal{P}$ non è uno spazio di Banach; infatti se si considera la successione di polinomi

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$$

ogni p_n appartiene allo spazio $\mathcal{P}$ e inoltre p_n converge uniformemente alla funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[0, 1]$ quindi è una successione di Cauchy in $\mathcal{P}$, ma la funzione limite $f(x) = e^x$ non appartiene allo spazio $\mathcal{P}$.

Definiamo con $\mathcal{P}_+$ (rispettivamente $\mathcal{P}_-$) l'insieme dei polinomi con coefficiente direttore positivo (rispettivamente negativo).

Si vede facilmente che $\mathcal{P}_+$ e $\mathcal{P}_-$ sono entrambi convessi; tuttavia non esiste alcun iperpiano che li separa.

Infatti, supponiamo esista un iperpiano di separazione, cioè supponiamo che esistano una costante reale α e un funzionale lineare e continuo F definito su $\mathcal{P}$, tali che per ogni p in $\mathcal{P}_+$ e per ogni q in $\mathcal{P}_-$ si abbia

$$F(q) \leq \alpha \leq F(p).$$

Osserviamo che se F fosse il funzionale nullo, allora non sarebbe di separazione, quindi esiste un $k \in \mathbb{N}$ per cui vale $F(x^k) \neq 0$. Supponiamo che sia $F(x) \neq 0$.

Inoltre, se esistesse un iperpiano di separazione, dovrebbe essere necessariamente $\alpha = 0$ poiché fissando $\varepsilon > 0$ e considerando $p = cx$ con $0 < c < \frac{\varepsilon}{F(x)}$, si ha che $p \in \mathcal{P}_+$ e $-p \in \mathcal{P}_-$, da cui $F(-p) = -F(p) \leq \alpha \leq F(p)$, cioè $|\alpha| \leq F(p)$, dove $F(p) = cF(x) < \varepsilon$. Segue quindi che $|\alpha| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Le precedenti considerazioni permettono di concludere che F è il funzionale identicamente nullo, quindi non è di separazione. Vediamo infatti che necessariamente $F(p) = 0$ per ogni polinomio $p \in \mathcal{P}$.

Supponiamo per assurdo che esista un polinomio p tale che $F(p) \neq 0$. Il polinomio p appartiene a $\mathcal{P}_+$ oppure a $\mathcal{P}_-$. Supponiamo sia $p \in \mathcal{P}_+$ quindi $p = \sum_{i=1}^n c_i x^i$ con $c_n > 0$ per qualche n . Definiamo $q = p + c_{n+1}x^{n+1}$ con $c_{n+1} < 0$. Allora $F(q) \leq 0$ in quanto q appartiene a $\mathcal{P}_-$. D'altra parte, per linearità, $F(q) = F(p) + c_{n+1}F(x^{n+1})$. Osserviamo che $F(x^{n+1}) \geq 0$ quindi si può scegliere $c_{n+1} < 0$ tale che $F(q)$ risulti positivo e questo è in contraddizione con il fatto che $q \in \mathcal{P}_-$. $\square$

Esercizio 2.13. Sia E uno spazio di Banach uniformemente convesso. Per ogni $x \in E$ sia

$$F(x) = \{f \in E^* : \|f\|_{E^*} = \|x\| \quad e \quad f(x) = \|x\|^2\}.$$

Dimostrare che per ogni $f \in E^$ esiste uno ed un solo $x \in E$ tale che $f \in F(x)$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per ogni $x \in E$ se $f \in F(x)$ allora

$f(x) = \|f\|_{E^*}^2$. Fissiamo $f \in E^*$, e proviamo l'esistenza di $x \in E$ tale che $f \in F(x)$. Definiamo $G^* = \{\lambda f\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ sottospazio vettoriale di E^* . Sia ϕ il funzionale lineare e continuo su G^* definito da

$$\phi(\lambda f) = \lambda \|f\|_{E^*}^2$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Dal teorema di Hahn-Banach 2.1 segue che esiste $\Phi \in E^{**}$ prolungamento di ϕ tale che $\|\Phi\|_{E^{**}} = \|\phi\|_{G^{**}}$. Valutiamo $\|\phi\|_{G^{**}}$, usando la definizione di norma nello spazio duale

$$\|\phi\|_{G^{**}} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\phi(\lambda f)|}{\|\lambda f\|_{E^*}} = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda| \|f\|_{E^*}^2}{|\lambda| \|f\|_{E^*}} = \|f\|_{E^*}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che esiste $\Phi \in E^{**}$ tale che $\|\Phi\|_{E^{**}} = \|f\|_{E^*}$ e $\Phi(f) = \|f\|_{E^*}^2$. Per concludere rimane da osservare che, data l'uniforme convessità di E , per il teorema di Milman 2.5, E è riflessivo. Dunque esiste $x \in E$ tale che $f(x) = \Phi(f) = \|f\|_{E^*}^2$ ed inoltre $\|x\| = \|\Phi\|_{E^{**}} = \|f\|_{E^*}$.

Proviamo l'unicità. Supponiamo $f \neq 0$ (altrimenti l'unicità è banalmente verificata) e che, per assurdo, esistano $x_1, x_2 \in E$ diversi tra loro tali che $f \in F(x_1) \cap F(x_2)$. Poiché E è uniformemente convesso, se $\|x_1 - x_2\| > \varepsilon$ per $\varepsilon > 0$ e $\|x_1\| = \|x_2\| = \|f\|$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| < \|f\| - \delta.$$

Ma l'aver supposto $f \in F(x_1) \cap F(x_2)$ implica che $f(\frac{x_1+x_2}{2}) = \|f\|_{E^*}^2$ e dunque che

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| \geq \sup_{g \in E^* \setminus \{0\}} \frac{|g(\frac{x_1+x_2}{2})|}{\|g\|_{E^*}} \geq \frac{|f(\frac{x_1+x_2}{2})|}{\|f\|_{E^*}} = \|f\|_{E^*}$$

che è in contraddizione con la definizione di uniforme convessità. $\square$

Capitolo 3

Principi di analisi lineare

3.1 Introduzione

In questo capitolo ci occupiamo delle proprietà degli operatori definiti tra spazi normati. L'insieme degli operatori lineari e continui costituisce a sua volta uno spazio normato. Sugli spazi completi vale il teorema di Banach-Steinhaus, che stabilisce che per operatori lineari la limitatezza puntuale implica quella uniforme ed i teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso, che hanno importanti applicazioni nella risoluzione di equazioni differenziali lineari. Alla base di questi risultati, oltre alla completezza degli spazi, c'è il lemma delle categorie di Baire.

Enunciamo di seguito i principali teoremi a cui faremo riferimento.

Lemma 3.1 (Baire). *Sia X uno spazio metrico completo e sia $(C_n) \subset X$ una successione di chiusi tale che*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X.$$

Allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{int } C_{n_0} \neq \emptyset$.

Teorema 3.2 (Banach-Steinhaus). *Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato, $(T_i)_{i \in \mathcal{I}}$ una famiglia non necessariamente numerabile di operatori lineari e continui da X in Y . Supponiamo che*

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i(x)\| < \infty \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Allora

$$\sup_{i \in \mathcal{I}} \|T_i\| < \infty,$$

esiste cioè una costante $c > 0$ tale che

$$\|T_i(x)\| \leq c\|x\| \quad \text{per ogni } x \in X \text{ e } i \in \mathcal{I}.$$

Corollario 3.3. *Siano G un spazio normato e B un sottoinsieme di G . Supponiamo che per ogni $F \in G^*$ si abbia che*

$$\bigcup_{x \in B} F(x)$$

è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Allora B è un insieme limitato di G .

Corollario 3.4. *Siano G uno spazio di Banach e B^* un sottoinsieme di G^* . Supponiamo che per ogni $x \in G$ si abbia che*

$$\bigcup_{F \in B^*} F(x)$$

è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Allora B^ è un insieme limitato di G^* .*

Teorema 3.5 (Applicazione aperta). *Siano X, Y due spazi di Banach, $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare, continuo e suriettivo. Allora T è un operatore aperto, ovvero l'immagine di ogni aperto in X tramite T è un aperto in Y . Inoltre, se T è biiettivo, T^{-1} è continuo.*

Teorema 3.6 (Grafico chiuso). *Siano X, Y due spazi di Banach, $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operatore lineare chiuso, ovvero tale che il suo grafico $\mathcal{G}(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = T(x)\}$ è un sottoinsieme chiuso di $X \times Y$. Allora se $D(T)$ è chiuso si ha che T è limitato, quindi continuo.*

3.2 Esercizi

Esercizio 3.1. *Si considerino gli spazi $C^1([a, b])$ e $C^0([a, b])$ muniti entrambi della norma del sup $\|\cdot\|_\infty$. Verificare che l'operatore $T : C^1([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$ definito da $T(u) = u'$ per ogni $u \in C^1([a, b])$ non è continuo.*

Dimostrazione. Per provare che l'operatore T non è continuo, consideriamo la successione di funzioni $u_n(t)$ di $C^1([a, b])$

$$u_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}},$$

per la quale $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\|u'_n\|_\infty = \|\sqrt{n} \cos nt\|_\infty = \sqrt{n}$. Se esistesse $c > 0$ tale che $\|u'_n\|_\infty \leq c\|u_n\|_\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si avrebbe $n \leq c$ per ogni n e dunque l'assurdo. $\square$

Esercizio 3.2. Sia X lo spazio dei polinomi reali di una variabile reale con la norma

$$\|p\| = \sup_{t \in [-1,1]} |p(t)|.$$

Consideriamo il funzionale su X definito da $F(p) = p(2)$.

- (1) Provare che F è un funzionale lineare ma non limitato.
- (2) Definito l'operatore $T : p \in X \longrightarrow p' \in X$ che ad ogni polinomio assegna la sua derivata prima, provare che T non è limitato.

Dimostrazione. (1) La linearità di F si prova facilmente facendo vedere che per ogni $p, q \in X$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $F(\alpha p + \beta q) = \alpha p(2) + \beta q(2) = \alpha F(p) + \beta F(q)$. Proviamo che F non è limitato. Consideriamo la successione di polinomi in X $p_n(t) = t^n$. Allora $F(p_n) = p_n(2) = 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|p_n\| = \sup_{t \in [-1,1]} |t^n| = 1$, dunque

$$\frac{|F(p_n)|}{\|p_n\|} = 2^n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

da cui segue che non può esistere $c > 0$ tale che $|F(p_n)| \leq c\|p_n\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sia ora T l'operatore che associa ad ogni polinomio la sua derivata prima, $T(p) = p'$. Considerando ancora una volta la successione $p_n(t) = t^n$ si ha che $T(p_n) = nt^{n-1}$, dunque $\|T(p_n)\| = n$ e $\|p_n\| = 1$, per cui anche in questo caso non esiste $c > 0$ tale che si abbia $\|T(p_n)\| \leq c\|p_n\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 3.3. Si consideri l'operatore lineare $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definito da

$$T(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right),$$

con $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Dimostrare che T è un operatore limitato e che $T(\ell^2)$ non è chiuso.

Dimostrazione. Dato $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, sia $\|\cdot\|_2$ la norma su ℓ^2 definita da $\|x\|_2 = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ per ogni $x \in \ell^2$. Si ha che

$$\|T(x)\|_2^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{|x_j|^2}{j^2} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^2 = \|x\|_2^2,$$

quindi $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2)} \leq 1$.

Consideriamo ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'elemento $x_n \in \ell^2$ che ha le prime n componenti

uguali a 1 e tutte le altre nulle, $x_n = (1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$. Allora la successione

$$T(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right) \in \ell^2 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e converge all'elemento

$$\bar{x} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

che appartiene ad ℓ^2 , dal momento che $\sum_n \left(\frac{1}{n^2}\right) < +\infty$, ma non è un elemento dell'immagine di T , perché se lo fosse la sua controimmagine sarebbe $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ che non appartiene a ℓ^2 . Si conclude che $T(\ell^2)$ non è chiuso. $\square$

Esercizio 3.4. Sia X uno spazio normato ed Y uno spazio di Banach. Sia $(T_n) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ una successione di operatori lineari da X in Y tali che:

- (i) $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq M$;
- (ii) esiste E sottoinsieme denso di X tale che per ogni $x \in E$ la successione $T_n(x)$ converge.

Allora $T_n(x)$ converge per ogni $x \in X$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ esiste $(x_k) \subset E$ tale che x_k converge a $x \in X$. Dimostriamo che per ogni $x \in X$ la successione $T_n(x)$ è di Cauchy; la tesi segue dal fatto che Y è uno spazio completo.

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|T_n(x) - T_m(x)\| &\leq \|T_n(x) - T_n(x_k)\| + \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\| + \|T_m(x_k) - T_m(x)\| \leq \\ &\leq \|T_n\| \|x - x_k\| + \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\| + \|T_m\| \|x - x_k\|. \end{aligned}$$

Ora, poiché $(x_k) \subset E$ converge a $x \in X$ e $T_n(x_k)$ converge per ogni x_k per l'ipotesi (ii) ed è quindi di Cauchy, si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che se $n, m, k \geq n_0$

$$\|x - x_k\| \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad \|T_n(x_k) - T_m(x_k)\| \leq \varepsilon,$$

da cui segue che

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq (2M + 1)\varepsilon,$$

e dunque la tesi. $\square$

Esercizio 3.5. Sia $X = C^0([a, b])$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due qualsiasi norme definite su X , e $A : f \in (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow Af \in (X, \|\cdot\|_2)$ l'operatore lineare e continuo definito da

$$(Af)(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

la cui norma è definita da

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_2}{\|f\|_1}.$$

Consideriamo su X le norme $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$, con

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)| \quad e \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$$

per ogni $f \in X$. Valutare $\|A\|$ nei seguenti casi:

$$(1) \quad A : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\infty);$$

$$(2) \quad A : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1);$$

$$(3) \quad A : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1);$$

$$(4) \quad A : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\infty).$$

Dimostrazione. (1) Sia $x \in [a, b]$, allora dalla relazione

$$|(Af)(x)| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq (b-a) \|f\|_\infty$$

segue che $\|Af\|_\infty \leq (b-a) \|f\|_\infty$ e dunque $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq b-a$.

Se si considera la funzione $f(x)$ costantemente uguale a 1 su $[a, b]$, poiché vale $\|f\|_\infty = 1$ e $\|Af\|_\infty = b-a$, si può concludere che $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} = b-a$.

(2)

$$\begin{aligned} \|Af\|_1 &= \int_a^b \left| \int_a^x f(t) dt \right| dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f(t)| dt \right) dx \leq \\ &\leq \int_a^b \|f\|_1 dx = (b-a) \|f\|_1, \end{aligned}$$

quindi

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq b-a.$$

Per dimostrare che vale l'uguaglianza anche in questa situazione basta trovare una successione di funzioni continue (f_n) su $[a, b]$ per cui si abbia $\|f_n\|_1 = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|Af_n\|_1$ convergente a $b-a$ per n tendente all'infinito.

Consideriamo la successione $f_n(x)$ di funzioni continue su $[a, b]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n - 2n^2(x-a), & \text{se } x \in [a, a + \frac{1}{n}]; \\ 0, & \text{se } x \in [a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\|f_n\|_1 = 1$, infatti

$$\|f_n\|_1 = \int_a^{a+\frac{1}{n}} |f_n(t)| dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot 2n = 1.$$

Proviamo che $\|Af_n\|_1$ converge a $b - a$. Ragionando sugli integrali si ottiene

$$\begin{aligned} \|Af_n\|_1 &= \int_a^b \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| dx = \int_a^{a+\frac{1}{n}} \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| dx + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| dx \geq \\ &\geq \int_{a+\frac{1}{n}}^b \left| \int_a^x f_n(t) dt \right| dx = b - a - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Inoltre vale $\|Af_n\|_1 \leq (b - a)\|f_n\|_1 = b - a$, quindi passando al limite per n che tende all'infinito si ottiene la tesi.

(3) In questo caso, dalla relazione

$$\|Af\|_1 \leq \int_a^b \left(\int_a^x |f(t)| dt \right) dx \leq \|f\|_\infty \int_a^b (x - a) dx = \|f\|_\infty \frac{(b - a)^2}{2}$$

segue che $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{(b-a)^2}{2}$. Per provare che vale l'uguaglianza si considera di nuovo la funzione costante uguale a 1 su $[a, b]$, tale che $\|f\|_\infty = 1$ e $\|Af\|_1 = \frac{(b-a)^2}{2}$.

(4) Per ogni $x \in [a, b]$

$$|(Af)(x)| = \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \|f\|_1,$$

e dunque $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_1$ che implica $\|A\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1$.

Per dimostrare che è proprio uguale a 1 si ragiona come nel caso precedente, scegliendo la funzione costante $f(x) = \frac{1}{b-a}$ e mostrando che per tale f si ha

$$\frac{\|Af\|_\infty}{\|f\|_1} = 1.$$

□

Esercizio 3.6. Sia $T : f \in L^2(0, 1) \longrightarrow Tf \in L^2(0, 1)$ un operatore definito da

$$(Tf)(x) = x \int_0^1 f(t) dt.$$

(1) Provare che T è lineare e continuo.

(2) Provare che lo spazio

$$M = \{f \in L^2(0,1) : xf(x) \in L^2(0,1)\}$$

è uno spazio metrico completo rispetto alla norma $\|f\|_M = \|\sqrt{1+x^2}f\|_2$,
dove $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|dx\right)^{\frac{1}{2}}$ per ogni $f \in L^2(0,1)$.

(3) Provare che $M \subset L^1(0,1)$, ma $M \neq L^1(0,1)$ e $\|f\|_1 \leq \sqrt{\pi}\|f\|_M$.

Dimostrazione. (1) Mostriamo che l'operatore T è limitato e quindi continuo (la linearità segue dalla definizione dell'operatore stesso).

$$\begin{aligned}\|(Tf)(x)\|_2^2 &= \int_0^1 \left(x \int_0^1 f(t)dt\right)^2 dx = \int_0^1 x^2 \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 dx \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 \int_0^1 x^2 dx = \|f\|_2^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultima uguaglianza si è ottenuta applicando la disuguaglianza di Hölder. Dunque

$$\|(Tf)(x)\|_2^2 \leq \frac{1}{3}\|f\|_2^2,$$

da cui segue che $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) Proviamo che M è un sottospazio vettoriale di $L^2(0,1)$. Consideriamo $f, g \in M$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; dal fatto che $f, g \in M$ e dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$\int_0^1 x^2 [(\alpha f + \beta g)(x)]^2 dx < \infty,$$

e quindi $\alpha f + \beta g \in M$.

Mostriamo adesso che il sottospazio M , dotato della norma $\|f\|_M = \|\sqrt{1+x^2}f\|_2$, è completo. Per fare ciò consideriamo una successione di Cauchy in M e dimostriamo che tale successione è di Cauchy anche in $L^2(0,1)$. Dal momento che $L^2(0,1)$ è completo, se la successione è di Cauchy allora converge in norma ad un elemento $f \in L^2(0,1)$ ed è facile mostrare che $f \in M$, cioè $xf(x) \in L^2(0,1)$.

Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in M . Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq n_0$ vale $\|f_n - f_m\|_M < \varepsilon$.

Quindi

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 &> \|f_n - f_m\|_M^2 = \|\sqrt{1+x^2}(f_n - f_m)\|_2^2 = \int_0^1 (1+x^2)(f_n - f_m)^2 dx = \\ &= \int_0^1 (f_n - f_m)^2 dx + \int_0^1 x^2(f_n - f_m)^2 dx.\end{aligned}$$

Osserviamo che il primo addendo dell'ultimo membro è proprio $\int_0^1 (f_n - f_m)^2 dx = \|f_n - f_m\|_2^2$ e il secondo membro è $\int_0^1 [(f_n - f_m)x]^2 dx = \|(f_n - f_m)x\|_2^2$ che è positivo, dunque minorando con 0 si ottiene

$$\|f_n - f_m\|_2^2 < \varepsilon^2,$$

ovvero f_n è di Cauchy in $L^2(0,1)$.

(3) È chiaro che $M \subseteq L^1(0,1)$, poiché $M \subseteq L^2(0,1) \subseteq L^1(0,1)$ essendo $(0,1)$ un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$.

Proviamo che $M \neq L^1(0,1)$. Infatti, se consideriamo $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $h \in L^1(0,1)$ dal momento che $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$, mentre

$$\|h\|_M^2 = \|\sqrt{1+x^2}h\|_2^2 = \int_0^1 h^2(x)(1+x^2)dx = \int_0^1 \frac{1+x^2}{x} dx > \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty,$$

ovvero $h \notin M$.

Vediamo ora che se $f \in M$, applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}|f(x)|}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}|f(x)| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Il primo fattore dell'ultimo membro è $\|f\|_M$ mentre per il secondo fattore si ha

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} = ([\arctan x]_0^1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} < \sqrt{\pi},$$

per cui $\|f\|_1 \leq \sqrt{\pi}\|f\|_M$. □

Esercizio 3.7. Sia $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Consideriamo $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ e definiamo l'operatore lineare M_λ tale che $M_\lambda(x) = \lambda x = (\lambda_i x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

(1) Determinare sotto quali ipotesi su λ si ha $M_\lambda : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$.

(2) Valutare la norma dell'operatore $\|M_\lambda\|_{\mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)}$.

(3) Determinare sotto quali ipotesi l'operatore M_λ è una biezione.

Dimostrazione. (1) Se supponiamo che λ sia limitata, cioè $\lambda \in \ell^\infty$, allora $M_\lambda(x) = \lambda x \in \ell^1$ per ogni $x \in \ell^1$. Infatti $|\lambda_i| \leq \|\lambda\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$, per cui

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i x_i| = \sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i| |x_i| \leq \|\lambda\|_\infty \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| = \|\lambda\|_\infty \|x\|_1 < +\infty. \quad (3.1)$$

Questa relazione permette anche di dire che M_λ è un operatore limitato, quindi continuo.

Se invece λ non è limitata esiste una sottosuccessione estratta λ_{i_j} tale che $|\lambda_{i_j}| > j^2$. Consideriamo la successione $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $y_{i_j} = \frac{1}{j^2}$ e $y_i = 0$ se $i \neq i_j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$. Allora $y \in \ell^1$ poiché $\sum_{i=0}^{\infty} |y_i| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ che converge. Analizziamo ora $M_\lambda(y)$. Dal momento che $|\lambda_i y_i| > 1$ se $i = i_j$, ed è 0 altrove, si ha che $\sum_{i=0}^{\infty} |\lambda_i y_i|$ non converge, dunque $M_\lambda(x) \notin \ell^1$.

(2) Dalla (3.1) segue che

$$\|M_\lambda\|_{\mathcal{L}(\ell^1, \ell^1)} \leq \|\lambda\|_\infty.$$

Proviamo che vale l'uguaglianza. Consideriamo un'opportuna successione di ℓ^1 di norma unitaria, $(e^{(n)}) \subset \ell^1$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $e_n^{(n)} = 1$ e $e_i^{(n)} = 0$ per $i \neq n$, e facciamo vedere che $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_\lambda(e^{(n)})\|_1 = \|\lambda\|_\infty$.

Si ha che $\lambda_n e_n^{(n)} = \lambda_n$, e $\lambda_i e_i^{(n)} = 0$ per $i \neq n$, dunque $\|\lambda e^{(n)}\|_1 = |\lambda_n|$.

Quindi si ottiene

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_\lambda(e^{(n)})\|_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| = \|\lambda\|_\infty,$$

da cui la tesi.

(3) Osserviamo che, dato l'operatore M_λ , con $\lambda \in \ell^\infty$, $x \in \ker M_\lambda$ se e solo se $x_i = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda_i \neq 0$.

Dal momento che un generico operatore lineare M è iniettivo se e solo se $\ker M = \{0\}$, considerando quanto già osservato, possiamo dedurre che M_λ è iniettivo se e solo se $\lambda_i \neq 0$ per ogni i .

Sia ora $\lambda \in \ell^\infty$ tale che M_λ sia iniettiva. Proviamo che

$$M_\lambda \text{ è suriettivo} \iff \inf_i |\lambda_i| > 0.$$

($\Leftarrow$) Sia $y \in \ell^1$, proviamo che esiste $x \in \ell^1$ tale che $\lambda x = y$. Basterà scegliere $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ con $x_i = \frac{y_i}{\lambda_i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Vediamo che x così definita appartiene a ℓ^1 . Poiché $\inf_i |\lambda_i| > 0$

$$\frac{1}{|\lambda_i|} \leq \sup_i \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{\inf_i |\lambda_i|}.$$

Segue che $x \in \ell^1$ poiché

$$\sum_i \left| \frac{y_i}{\lambda_i} \right| \leq \frac{1}{\inf_i |\lambda_i|} \sum_i |y_i| < \infty.$$

($\Rightarrow$) Sia per assurdo $\inf_i |\lambda_i| = 0$, con $\lambda_i \neq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ dal momento che stiamo supponendo M_λ iniettiva. Allora esiste una sottosuccessione estratta λ_{i_j} tale che $\frac{1}{|\lambda_{i_j}|} > j^2$. Consideriamo $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $y_{i_j} = \frac{1}{j^2}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ e $y_i = 0$ altrove. Abbiamo già provato al punto (1) che $y \in \ell^1$, ma non esiste $x \in \ell^1$ tale che $x_i \lambda_i = y_i$. Infatti se una tale x esistesse dovrebbe essere $\frac{y_i}{\lambda_i} \in \ell^1$, ma $\sum_i \left| \frac{y_i}{\lambda_i} \right|$ non converge, dal momento che $\left| \frac{y_{i_j}}{\lambda_{i_j}} \right| > 1$. $\square$

Esercizio 3.8. Siano X e Y spazi di Banach, $V \subseteq X$ un sottospazio denso in X . Sia $T : V \rightarrow Y$ un operatore lineare e continuo. Allora T si estende in modo unico ad un operatore lineare e continuo $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ tale che $\|\tilde{T}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(V,Y)}$.

Dimostrazione. Sia $x \in X$, allora per l'ipotesi di densità esiste una successione (v_n) in V che converge a x rispetto alla norma definita in X , che è dunque di Cauchy in V , ovvero per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > n_0$, si ha $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$. Segue che la successione $T(v_n)$ è di Cauchy in Y , dal momento che per ogni $n, m > n_0$

$$\|T(v_n) - T(v_m)\| = \|T(v_n - v_m)\| \leq \|T\| \|v_n - v_m\| < \varepsilon$$

e dunque, poiché Y è completo, $T(v_n)$ converge a un elemento $y \in Y$.

Definiamo allora $\tilde{T}(x) = y$ per ogni $x \in X$; proviamo che $\tilde{T}$ è lineare. Siano $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora esistono (v_n) e (u_n) successioni in V tali che

$$\lambda v_n \rightarrow \lambda x_1 \quad \text{e} \quad \mu u_n \rightarrow \mu x_2,$$

per cui, dalla linearità di T

$$\tilde{T}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(\lambda v_n + \mu u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda T(v_n) + \mu T(u_n)) = \lambda \tilde{T}(x_1) + \mu \tilde{T}(x_2).$$

Per la continuità basta osservare che esiste $c > 0$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $\|T(v_n)\| \leq c \|v_n\|$, e passando al limite si ottiene $\|\tilde{T}(x)\| \leq c \|x\|$ per ogni $x \in X$,

dunque $\tilde{T}$ è limitato in un intorno dello 0. Segue che $\tilde{T}$ è un prolungamento per T lineare e continuo.

Proviamo che è unico. Supponiamo che esista un altro prolungamento lineare e continuo $\bar{T}$ tale che $\bar{T}(x) \neq y = \tilde{T}(x)$ per qualche $x \in X \setminus V$. Allora sarà $\tilde{T}(x) - \bar{T}(x) \neq 0$, mentre $\tilde{T}(v) - \bar{T}(v) = 0$ per ogni $v \in V$. Sia (v_n) in V che converge a x , allora per la continuità di $\tilde{T} - \bar{T}$, poiché vale $\tilde{T}(v_n) - \bar{T}(v_n) = 0$ segue che $\tilde{T}(x) - \bar{T}(x) = 0$, che è assurdo.

Resta da dimostrare che le norme sono uguali.

$$\|T\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|\tilde{T}(v)\|}{\|v\|} \leq \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|\tilde{T}(x)\|}{\|x\|} = \|\tilde{T}\|.$$

Se fosse $\|T\| < \|\tilde{T}\|$, esisterebbe $x \neq 0$ tale che $\|T\| < \frac{\|\tilde{T}(x)\|}{\|x\|}$. Sia (v_n) in V che converge a x ; allora per $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\|T(v_n)\|}{\|v_n\|} = \frac{\|\tilde{T}(v_n)\|}{\|v_n\|} \rightarrow \frac{\|\tilde{T}(x)\|}{\|x\|},$$

per cui esisterebbe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{\|T(v_{\bar{n}})\|}{\|v_{\bar{n}}\|} > \|T\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|}.$$

Allora vale necessariamente $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. □

Esercizio 3.9. Sia $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ un operatore lineare e limitato tra spazi normati con dominio $D(T) \subset X$.

(1) Provare che se $D(T)$ è chiuso allora T è chiuso.

(2) Provare che se T è chiuso e Y è completo allora $D(T)$ è chiuso.

Dimostrazione. (1) Sia (x_n) una successione contenuta in $D(T)$ tale che x_n converge a $x \in X$ e $T(x_n)$ converge a $y \in Y$. Dal momento che per ipotesi $D(T)$ è chiuso si ha che $x \in D(T)$ e dalla continuità di T segue che $y = T(x)$.

Si può concludere che T è un operatore chiuso.

(2) Sia $(x_n) \subset D(T)$ tale che x_n converge a $x \in X$. Dobbiamo provare che $x \in D(T)$.

Osserviamo che, essendo convergente in X , (x_n) è di Cauchy: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > n_0$, $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Dal momento che T è limitato, esiste $C > 0$ tale che, per ogni $n, m > n_0$

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq C\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

e quindi la successione $T(x_n)$ è di Cauchy in Y . Allora dalla completezza di Y segue che $T(x_n) \rightarrow y \in Y$ e poiché T è chiuso si ha che $T(x) = y$ e $x \in D(T)$. $\square$

Esercizio 3.10. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora esiste un intervallo sul quale è lipschitziana.

Dimostrazione. Si consideri la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow f'(x)$ per $n \rightarrow +\infty$. Per dimostrare la lipschitzianità di f basta trovare un intervallo su cui tale successione, e quindi f' , sia uniformemente limitata.

Dal momento che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ converge, $f_n(x)$ è limitata, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $p \in \mathbb{N}$ tale che $|f_n(x)| \leq p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si può allora esprimere $\mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| \leq p\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p,$$

dove A_p sono insiemi chiusi. Quindi $\mathbb{R}$ si scrive come unione numerabile di chiusi e per il lemma di Baire 3.1 almeno uno di essi ha interno non vuoto, esiste cioè $p_0 \in \mathbb{N}$ per cui $A_{p_0} \subset \mathbb{R}$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ tale che

$$|f_n(x)| \leq p_0 \quad \text{per ogni } x \in A_{p_0}. \quad (3.2)$$

Passando al limite in (3.2) per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene che $|f'(x)| \leq p_0$ per ogni $x \in A_{p_0}$, ovvero f' è uniformemente limitata sull'intervallo A_{p_0} , da cui la tesi. $\square$

Esercizio 3.11. Sia $X = C^0([a, b])$, e consideriamo su X le norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad e \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

per ogni $f \in X$.

- (1) Provare che l'operatore identità definito da $(X, \|\cdot\|_\infty)$ in $(X, \|\cdot\|_1)$ è un operatore continuo, mentre l'operatore inverso non lo è.
- (2) Dimostrare che X con la norma $\|\cdot\|_\infty$ è uno spazio di Banach, mentre $(X, \|\cdot\|_1)$ non è completo.

Dimostrazione. (1) Consideriamo l'operatore identità $T : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1)$. T è continuo, poiché per ogni $f \in X$ si ha

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Consideriamo ora l'operatore inverso $T^{-1} : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\infty)$, e sia f_n la successione di funzioni in X

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - n(x-a), & \text{se } x \in [a, a + \frac{1}{n}]; \\ 0, & \text{se } x \in [a + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

Abbiamo già dimostrato nell'esercizio 2.4 che la successione f_n converge a 0 nella topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|_1$; se T^{-1} fosse continua allora $T^{-1}(f_n) = f_n$ dovrebbe convergere a 0 anche nella topologia della norma $\|\cdot\|_\infty$, ma ciò non può succedere dal momento che $\|f_n\|_\infty = 1$.

(2) Proviamo che $(X, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Sia f_n successione di Cauchy in X ; allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > n_0$, $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, ovvero

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Allora, per ogni $x \in [a, b]$, $f_n(x)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, dunque converge per la completezza di $\mathbb{R}$; sia $f(x)$ il suo limite. Proviamo che f_n converge a f rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$.

Fissando n nella relazione (3.3) e passando al limite per $m \rightarrow \infty$ si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Dunque f_n converge a f in norma $\|\cdot\|_\infty$, ovvero f_n converge uniformemente a f , con $f \in C^0([a, b])$ poiché è limite uniforme di una successione di funzioni continue. Proviamo invece che $(X, \|\cdot\|_1)$ non è uno spazio completo. Consideriamo l'operatore identità $T : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ che, per quanto provato al punto precedente, è continuo, lineare e biiettivo. Se anche $(X, \|\cdot\|_1)$ fosse uno spazio di Banach, allora per il teorema dell'applicazione aperta 3.5 l'operatore inverso $T^{-1} : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_\infty)$ sarebbe un operatore continuo, e ciò è in contraddizione con quanto dimostrato al punto (1). $\square$

Esercizio 3.12. Sia T un operatore lineare e continuo fra E ed F spazi di Banach. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

(i) esiste $a > 0$ tale che per ogni $x \in E$ si abbia $\|T(x)\| \geq a\|x\|$;

(ii) l'operatore T è iniettivo e $T(E)$ è chiuso.

Dimostrazione. Proviamo che (i) implica (ii). Siano $x, y \in E$ tali che $T(x) = T(y)$, allora poiché per l'ipotesi (i) vale

$$0 = \|T(x) - T(y)\| \geq a\|x - y\|,$$

$\|x - y\|$ è necessariamente nullo e dunque T è iniettivo. Allora $T : E \longrightarrow T(E)$ è lineare e biiettivo e quindi, per il teorema dell'applicazione aperta 3.5, T^{-1} è continuo e limitato. Sia allora $(y_n) \subset T(E)$ una successione convergente ad y in F ; mostriamo che $y \in T(E)$. Sia $(x_n) \subset E$ tale che $T(x_n) = y_n$. Allora

$$\|x_n - x_m\| \leq \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|.$$

Quindi, poiché (y_n) è di Cauchy, anche (x_n) lo è, dunque dato che E è completo, x_n converge ad $x \in E$. Dalla continuità di T discende che $y_n \rightarrow T(x)$ per $n \rightarrow +\infty$, e per l'unicità del limite $T(x) = y$ e dunque $y \in T(E)$.

Proviamo ora che (ii) implica (i). Supponiamo per assurdo che per ogni $a > 0$ e per ogni $x \in E$

$$\|T(x)\| \leq a\|x\|.$$

Si avrebbe allora che per ogni $a > 0$

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq a,$$

e quindi T sarebbe l'operatore identicamente nullo, in contraddizione con il fatto che T è iniettivo. $\square$

Esercizio 3.13. Sia E uno spazio di Banach e $T : x \in E \longrightarrow Tx \in E^*$ un operatore lineare tale che per ogni $x \in E$

$$(Tx)(x) \geq 0.$$

Provare che T è continuo.

Dimostrazione. Dal momento che entrambi gli spazi E ed E^* sono spazi di Banach e T è lineare, per il teorema del grafico chiuso 3.6 basta provare che T è un operatore chiuso. Sia $(x_n) \subset E$ una successione tale che

$$x_n \rightarrow x \in E \quad \text{e} \quad Tx_n \rightarrow F \in E^*.$$

Proviamo che $Tx = F$. Si noti che per la linearità si può supporre $x = 0$; se $x \neq 0$ basta infatti considerare la successione $(x_n - x)$. Dimostriamo quindi che F è il

funzionale identicamente nullo.

Sia $v \in E$, $\|v\| \leq 1$, allora

$$0 \leq (Tx_n - Tv)(x_n - v)$$

da cui, passando al limite,

$$F(v) \leq T(v)(v).$$

Considerando la disuguaglianza per $-v \in E$ otteniamo $F(v) \geq -T(v)(v)$, quindi possiamo scrivere

$$|F(v)| \leq (Tv)(v) \leq |(Tv)(v)| \quad \forall v \in E \text{ tale che } \|v\| \leq 1. \quad (3.4)$$

Passando al sup in (3.4) e sfruttando la definizione di norma duale $\|F\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |F(x)|$, si ottiene $\|F\|_{E^*} \leq \|Tv\|_{E^*}$, e poiché in particolare vale per $v = 0$, segue che $F = 0$. $\square$

Esercizio 3.14. Siano E, F due spazi di Banach e sia $a : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare tale che:

- (i) per ogni fissato $x \in E$ l'applicazione che associa ad ogni $y \in F$ il valore $a(x, y)$ sia continua;
- (ii) per ogni fissato $y \in F$ l'applicazione che associa ad ogni $x \in E$ il valore $a(x, y)$ sia continua.

Dimostrare che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $x \in E$ e $y \in F$

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|_E\|y\|_F,$$

cioè a è continua.

Dimostrazione. Osserviamo che per ogni fissato $y \in F$, $a(\cdot, y) \in E^*$. Per provare la tesi basta dimostrare che

$$\sup_{y \in F \setminus \{0\}} \frac{\|a(\cdot, y)\|_{E^*}}{\|y\|_F} = C \in (0, +\infty). \quad (3.5)$$

Infatti per l'ipotesi (ii) si ha che, per ogni $y \in F$ fissato

$$|a(x, y)| \leq \|a(\cdot, y)\|_{E^*}\|x\|_E$$

per ogni $x \in E$; se vale (3.5) allora

$$|a(x, y)| \leq C\|x\|_E\|y\|_F$$

per ogni $x \in E$ e $y \in F$, che è quanto volevamo dimostrare.

Sia H l'insieme delle applicazioni $h_y : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definite al variare di $y \in F \setminus \{0\}$ da

$$h_y(x) = \frac{a(x, y)}{\|y\|_F}.$$

$H \subset E^*$ e, per ogni $x \in E$ fissato, l'insieme

$$H(x) = \bigcup_{y \in F \setminus \{0\}} h_y(x) = \bigcup_{y \in F \setminus \{0\}} \frac{a(x, y)}{\|y\|_F}$$

è limitato in $\mathbb{R}$, poiché per l'ipotesi (i) per ogni $x \in E$ esiste $C_x > 0$ tale che $|a(x, y)| \leq C_x \|y\|_F$ per ogni $y \in F$.

Per il corollario 3.4 del teorema di Banach-Steinhaus H è limitato in E^* , quindi vale

$$\sup_{y \in F \setminus \{0\}} \|h_y\|_{E^*} = \sup_{y \in F \setminus \{0\}} \frac{\|a(\cdot, y)\|_{E^*}}{\|y\|_F} = C \in (0, +\infty).$$

□

Capitolo 4

Topologie deboli

4.1 Introduzione

In spazi normati a dimensione infinita non sono valide alcune proprietà che valgono in spazi a dimensione finita, come ad esempio la compattezza per successioni delle palle chiuse rispetto alla topologia indotta dalla norma. Nasce così l'esigenza di introdurre una nuova topologia in cui possano essere estese al caso di spazi di dimensione infinita alcune proprietà che vengono meno nella topologia usuale della norma. La nuova topologia che consideriamo su uno spazio normato è detta *topologia debole*, in cui si definisce la nozione di convergenza debole facendo agire sulle successioni di uno spazio gli elementi del suo spazio duale. La convergenza debole è garantita dalla convergenza in norma, ma non vale il viceversa.

Se inoltre lo spazio considerato è riflessivo, cioè se può essere identificato con il duale del suo duale, si dimostra che un sottoinsieme chiuso e limitato in norma è anche compatto nella topologia debole. Inoltre vale che da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.

Enunciamo di seguito i principali teoremi a cui faremo riferimento.

Teorema 4.1. *Sia X uno spazio normato, $C \subset X$ convesso.*

Allora C è debolmente chiuso se e solo se C è chiuso nella topologia forte, cioè quella indotta dalla norma su X .

Teorema 4.2. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, $K \subset X$ un convesso, chiuso e limitato in norma. Allora K è un compatto nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Teorema 4.3. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo, C un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di X e $\phi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa,*

inferiormente semicontinua, $\phi \neq +\infty$ e tale che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty.$$

Allora ϕ raggiunge il suo minimo su C , cioè esiste $x_0 \in C$ tale che $\phi(x_0) \leq \phi(x)$ per ogni $x \in C$.

Teorema 4.4. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e sia $(x_n) \subset X$ una successione limitata in norma. Allora esiste una sottosuccessione estratta che converge per la topologia debole $\sigma(X, X^*)$.*

Teorema 4.5 (Banach-Alaoglu-Bourbaki). *La sfera unitaria $B_{X^*} = \{F \in X^* : \|F\|_{X^*} \leq 1\}$ è compatta nella topologia debole $*$ definita su X^* .*

Teorema 4.6 (Riemann-Lebesgue). *Sia $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega = [0, 1]^N \subset \mathbb{R}^N$ ed $u \in L^p(\Omega)$. Estendiamo u in modo periodico da Ω a tutto $\mathbb{R}^N$. Sia $u_k(x) = u(kx)$ e consideriamo*

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx.$$

Allora u_k converge debolmente a $\bar{u}$ per $1 \leq p < \infty$ e debole $*$ per $p = \infty$.

4.2 Esercizi

Esercizio 4.1. *Sia (x_n) una successione di uno spazio normato X . Provare che:*

- (1) *la convergenza forte implica la convergenza debole allo stesso limite. L'inverso non è vero in generale;*
- (2) *il limite debole della successione se esiste è unico;*
- (3) *se (x_n) converge debolmente a x , allora ogni sua sottosuccessione converge debolmente allo stesso limite.*

Dimostrazione. (1) Ricordiamo che x_n converge debolmente a x se

$$F(x_n) \rightarrow F(x) \quad \forall F \in X^*.$$

Supponiamo che $x_n \rightarrow x$ in norma. Allora $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Se F è un elemento del duale X^* , allora $|F(x_n) - F(x)| \leq \|F\| \|x_n - x\|$, e passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene che $F(x_n) \rightarrow F(x)$, ovvero x_n converge debolmente a x . (Il viceversa non è sempre vero; si possono costruire successioni convergenti debolmente che non convergono fortemente. Vedremo degli esempi in esercizi successivi).

(2) L'unicità del limite debole segue dal fatto che la topologia debole è una topologia separata e quindi a limite unico.

(3) Supponiamo che (x_n) converga debolmente a x ; allora per ogni $F \in X^*$, $F(x_n)$ è una successione di numeri reali convergente, dunque per ogni sottosuccessione estratta vale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x),$$

da cui la tesi. $\square$

Esercizio 4.2. Sia $T : X \longrightarrow Y$ un operatore lineare tra gli spazi normati X e Y tale che, per ogni $(x_n) \subset X$ che converge a 0 nella topologia debole di X si ha che $(Tx_n) \subset Y$ converge a 0 nella topologia debole di Y .

Assumendo che X sia riflessivo provare che T è un operatore limitato.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che T non sia limitato. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in X$ tale che $\|T(\xi_n)\| > n\|\xi_n\|$. Sia $x_n = \frac{\xi_n}{\|\xi_n\|}$, allora per ogni n

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \|T(x_n)\| > n. \quad (4.1)$$

Dal momento che x_n è equilimitata e X è riflessivo, per il teorema 4.4 esiste (x_{n_k}) sottosuccessione di (x_n) che converge nella topologia debole di X . Sia $x \in X$ il suo limite. Allora la successione $(x_{n_k} - x)$ converge a 0 nella topologia debole di X , da cui segue per ipotesi che $T(x_{n_k} - x)$ converge a 0 nella topologia debole di Y . Poiché T è lineare, la successione $T(x_{n_k})$ converge debolmente in Y e dunque è limitata in norma, ovvero esiste $M > 0$ tale che $\|T(x_{n_k})\| \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, ma questo è in contraddizione con quanto affermato in (4.1). $\square$

Esercizio 4.3. Diremo che una successione (x_n) di elementi in uno spazio normato X è debolmente di Cauchy se per ogni $F \in X^*$ vale che $F(x_n)$ è una successione di Cauchy.

(1) Provare che ogni successione debolmente di Cauchy è limitata.

(2) Provare che in uno spazio di Banach riflessivo ogni successione debolmente di Cauchy converge nella topologia debole.

Dimostrazione. (1) La successione $(x_n) \subset X$ induce la successione $(\phi_{x_n}) \subset X^{**}$ tale che, per ogni $F \in X^*$, $\phi_{x_n}(F) = F(x_n)$. La successione (ϕ_{x_n}) è di Cauchy dato che risulta

$$\|\phi_{x_n} - \phi_{x_m}\|_{X^{**}} = \sup_{\|F\| \leq 1} |F(x_n) - F(x_m)|$$

e per ipotesi la successione $F(x_n)$ è di Cauchy per ogni $F \in X^*$.

Dal momento che X^{**} è completo (ϕ_{x_n}) converge ed è quindi limitata. Osservando infine che $\|x_n\| = \|\phi_{x_n}\|_{X^{**}}$ segue la tesi.

(2) Si ricordi che in uno spazio di Banach riflessivo ogni successione limitata ammette un'estratta convergente nella topologia debole (teorema 4.4). Sia allora X uno spazio di Banach riflessivo e $(x_n) \subset X$ una successione debolmente di Cauchy. Per quanto dimostrato al punto (1) (x_n) è limitata e dunque per il teorema 4.4 esiste una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che x_{n_k} converge debolmente a $x \in X$, cioè $F(x_{n_k}) \rightarrow F(x)$ per ogni $F \in X^*$.

D'altra parte, poiché (x_n) è debolmente di Cauchy, $F(x_n)$ converge per ogni $F \in X^*$ e dunque per l'unicità del limite segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n_k}) = F(x),$$

per ogni $F \in X^*$. Allora la successione (x_n) converge debolmente a $x \in X$. $\square$

Esercizio 4.4. *Siano E, F spazi di Banach e $T : E \rightarrow F$ un operatore lineare e continuo. Diremo che T è compatto se, data (x_k) una successione limitata nella norma di E , $T(x_k)$ ammette una sottosuccessione che converge in F .*

(1) *Provare che se T è compatto allora trasforma successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti.*

(2) *L'inverso vale se E è riflessivo.*

Dimostrazione. (1) Data $(u_n) \subset E$ convergente debolmente a u dimostriamo che $T(u_n)$ converge a $T(u)$ nella topologia forte di F . Osserviamo che quest'implicazione vale se da ogni sottosuccessione $T(u_{n_k})$ è possibile estrarre una sottosuccessione $T(u_{n_{k_h}})$ che converge fortemente a $T(u)$. Ora u_{n_k} converge debolmente ad u (vedi esercizio 4.1), quindi è limitata e dunque, dal momento che T è compatto esiste un'estratta $T(u_{n_{k_h}}) \subset T(u_{n_k})$ che converge fortemente in F . Sia v il suo limite; proviamo che $v = T(u)$. Osserviamo che $S \circ T \in E^*$ per ogni $S \in F^*$. Allora

$$\begin{aligned} u_{n_{k_h}} \xrightarrow{E} u &\Rightarrow S(T(u_{n_{k_h}})) \rightarrow S(T(u)), \\ T(u_{n_{k_h}}) \xrightarrow{F} v &\Rightarrow S(T(u_{n_{k_h}})) \rightarrow S(v). \end{aligned}$$

Dunque, per unicità del limite, segue che per ogni $S \in F^*$ vale $S(T(u)) = S(v)$, ovvero per ogni $S \in F^*$ $S(T(u) - v) = 0$. Quindi $T(u) - v = 0$, cioè $T(u) = v$.

(2) Supponiamo ora E riflessivo e prendiamo (u_n) una successione limitata in norma da M . Dal momento che E è riflessivo, per il teorema 4.4 esiste un'estratta

(u_{n_k}) che converge debolmente. Per ipotesi allora $(T(u_{n_k}))$ converge fortemente e quindi T è compatto. $\square$

L'esercizio che segue estende a spazi di Banach riflessivi il teorema della proiezione su un sottospazio chiuso valido negli spazi di Hilbert, che vedremo nel capitolo 5.

Esercizio 4.5. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e Y un sottospazio chiuso di X . Dimostrare che per ogni $x \in X$ esiste almeno un elemento $x_0 \in Y$ tale che*

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia $\phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione continua tale che

$$\phi(y) = \|x - y\|.$$

Dimostriamo che ϕ ammette minimo in Y . Osserviamo che ϕ è convessa. Infatti presi $y_1, y_2 \in Y$ e $\lambda \in [0, 1]$ si ha

$$\begin{aligned} \phi(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) &= \|x - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2\| = \|x - \lambda y_1 - (1 - \lambda)y_2 + \lambda x - \lambda x\| \leq \\ &\leq \|\lambda(x - y_1)\| + \|(1 - \lambda)(x - y_2)\| = \lambda\phi(y_1) + (1 - \lambda)\phi(y_2). \end{aligned}$$

Fissiamo ora $a \in Y$ e poniamo $\lambda_0 = \phi(a)$. Sia $K = \{y \in Y : \phi(y) \leq \lambda_0\}$. K è chiuso e convesso, quindi chiuso nella topologia debole di X per il teorema 4.1. Inoltre, poiché dalla disuguaglianza

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| = \phi(y)$$

segue che

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} \phi(y) = +\infty,$$

si ha che K è necessariamente limitato. Allora esiste $r > 0$ tale che $K \subset rB'$ dove B' è la sfera chiusa unitaria di X , e si può affermare che, per il teorema 4.2, K è compatto nella topologia debole.

Inoltre, come già osservato, $\{y \in Y : \phi(y) \leq \alpha\}$ è debolmente chiuso per ogni $\alpha > 0$, ovvero ϕ è semicontinua inferiormente per la topologia debole.

Allora per il teorema 4.3, ϕ ammette minimo in K . Dunque esiste $x_0 \in K$ tale che $\phi(x_0) \leq \phi(y)$ per ogni $y \in K$. Questa relazione si estende ad ogni $y \in Y$ dal momento che, se consideriamo $y \in Y \setminus K$, vale $\phi(x_0) \leq \lambda_0 < \phi(y)$. Dunque x_0 è il punto di minimo cercato (si noti che l'ipotesi di riflessività dello spazio è essenziale per concludere). $\square$

Esercizio 4.6. Sia E uno spazio di Banach uniformemente convesso e sia $C \subset E$ convesso, chiuso e non vuoto. Dimostrare le seguenti affermazioni:

- (1) per ogni $x \in E$ esiste un unico elemento, che denotiamo con $P_C(x) \in C$ tale che

$$\text{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\| = \|x - P_C(x)\|$$

(l'elemento $P_C(x) \in C$ viene anche detto proiezione di x su C);

- (2) ogni successione minimizzante converge fortemente a $P_C(x)$;

- (3) l'applicazione $P_C : x \in E \longrightarrow P_C(x) \in C$ è continua rispetto alla topologia forte.

Dimostrazione. (1) Fissiamo $x \in E$ e definiamo

$$\phi : y \in C \longrightarrow \|x - y\| \in \mathbb{R}^+$$

Osserviamo che per il teorema di Milman 2.5 E è riflessivo perché uniformemente convesso. Inoltre C e ϕ soddisfano le ipotesi del teorema 4.3. Dunque esiste $\bar{y} \in C$, che indicheremo con $\bar{y} = P_C(x)$, tale che

$$\|x - \bar{y}\| = \min_{y \in C} \phi(y) = \text{dist}(x, C).$$

Proviamo l'unicità. Sia $x \in E$, e supponiamo esistano $y_1, y_2 \in C$ con $y_1 \neq y_2$, tali che $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \text{dist}(x, C)$. Sia $z = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Poiché C è convesso, $z \in C$ e per l'uniforme convessità di E esiste $\delta > 0$ tale che

$$\|z - x\| = \left\| \frac{y_1 - x}{2} + \frac{y_2 - x}{2} \right\| < \text{dist}(x, C) - \delta < \text{dist}(x, C),$$

e ciò è assurdo.

- (2) Sia $(y_n) \subset C$ una successione minimizzante, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| = \text{dist}(x, C) = d.$$

Dal momento che E è uno spazio di Banach, dimostriamo che y_n converge verificando che è di Cauchy. Supponiamo per assurdo che non lo sia. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\bar{n} \in \mathbb{N}$ risulta $\|y_n - y_m\| > \varepsilon$ per $n, m > \bar{n}$.

Per ogni $\zeta > 0$ esiste n_ζ tale che $\|y_n - x\| < d + \zeta$ per ogni $n > n_\zeta$. Dunque, fissato $\zeta > 0$

$$(y_n - x) \in B(0, d + \zeta) \quad \text{per ogni } n > n_\zeta.$$

Siano $\bar{n}, \bar{m} \geq n_\zeta$ tali che $\|y_{\bar{n}} - y_{\bar{m}}\| > \varepsilon$, (tali $\bar{n}, \bar{m}$ esistono per la negazione di Cauchy-convergenza). Consideriamo i punti $y_{\bar{n}} - x$ e $y_{\bar{m}} - x$. Risulta

$$\|y_{\bar{n}} - x\| < d + \zeta \quad \text{e} \quad \|y_{\bar{m}} - x\| < d + \zeta$$

e

$$\|(y_{\bar{n}} - x) - (y_{\bar{m}} - x)\| > \varepsilon.$$

Poiché E è uniformemente convesso, per definizione esiste $\delta > 0$ tale che

$$\left\| \frac{(y_{\bar{n}} - x) + (y_{\bar{m}} - x)}{2} \right\| < d + \zeta - \delta,$$

ovvero

$$\left\| \frac{y_{\bar{n}} + y_{\bar{m}}}{2} - x \right\| < d + \zeta - \delta.$$

Poiché ζ è arbitrario e δ è assegnato, possiamo sceglierlo in modo tale che $\zeta - \delta < 0$ e otteniamo

$$\left\| \frac{y_{\bar{n}} + y_{\bar{m}}}{2} - x \right\| < d$$

che è assurdo in quanto, essendo C convesso,

$$\frac{y_{\bar{n}} + y_{\bar{m}}}{2} \in C.$$

Rimane da osservare che y_n non può che tendere a $P_C(x)$. Infatti se y_n converge ad un certo elemento $\bar{y} \in E$, si ha

$$\|\bar{y} - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\| = \text{dist}(x, C) = \|x - P_C(x)\|$$

e quindi $\bar{y} = P_C(x)$.

(3) Sia $(x_n) \subset E$ convergente a x . Dimostriamo la continuità di $P_C(x)$, provando che $P_C(x_n)$ converge a $P_C(x)$. Poniamo $d_n = \|x_n - P_C(x_n)\|$, $\bar{d}_n = \|x - P_C(x_n)\|$ ed infine $d = \text{dist}(x, C)$. Ricordiamo che la funzione $x \in E \rightarrow \text{dist}(x, C) \in \mathbb{R}^+$ è continua, quindi d_n converge a d .

Supponiamo innanzitutto che $x \in C$. In questo caso $d = 0$ e $x = P_C(x)$ e dunque da

$$\|P_C(x_n) - P_C(x)\| \leq d_n + \|x_n - x\|$$

segue che $\|P_C(x_n) - P_C(x)\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Supponiamo ora $x \notin C$. In questo caso $d > 0$ essendo C chiuso. Se si suppone per assurdo che $P_C(x_n)$ non converge a $P_C(x)$, a meno di sottosuccessioni, esiste $\varepsilon > 0$

tale che, per ogni n ,

$$\|P_C(x_n) - P_C(x)\| > \varepsilon.$$

Osserviamo inoltre che per la disuguaglianza triangolare vale

$$\bar{d}_n \leq d_n + \|x_n - x\| \quad (4.2)$$

e quindi, poiché d_n converge a d e x_n converge a x , fissato $\zeta > 0$ esiste n_ζ tale che per ogni $n > n_\zeta$

$$0 < \bar{d}_n \leq d + \zeta$$

(infatti dato che $x \notin C$, $\bar{d}_n > 0$ per ogni n). Consideriamo i punti $\frac{x - P_C(x)}{\bar{d}_n}$ e $\frac{x - P_C(x_n)}{\bar{d}_n}$. Poiché $\bar{d}_n \geq d$ per ogni n , i due punti hanno norma minore o uguale a 1 ed inoltre per ogni $n > n_\zeta$ si ha

$$\left\| \frac{x - P_C(x_n)}{\bar{d}_n} - \frac{x - P_C(x)}{\bar{d}_n} \right\| = \frac{\|P_C(x) - P_C(x_n)\|}{\bar{d}_n} > \frac{\varepsilon}{\bar{d}_n} \geq \frac{\varepsilon}{d + \zeta}.$$

Applicando la definizione di uniforme convessità per E risulta, per un certo $\delta > 0$ e per ogni $n > n_\zeta$, che

$$\left\| \frac{1}{2} \left(\frac{x - P_C(x)}{\bar{d}_n} + \frac{x - P_C(x_n)}{\bar{d}_n} \right) \right\| < 1 - \delta$$

ovvero

$$\left\| \frac{P_C(x) + P_C(x_n)}{2} - x \right\| < \bar{d}_n - \delta \bar{d}_n \leq \bar{d}_n - \delta d.$$

In definitiva abbiamo che, per ogni $n > n_\zeta$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{P_C(x) + P_C(x_n)}{2} - x_n \right\| &\leq \left\| \frac{P_C(x) + P_C(x_n)}{2} - x \right\| + \|x_n - x\| \leq \\ &\leq \|x_n - x\| + \bar{d}_n - \delta d \leq 2\|x_n - x\| + d_n - \delta d, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla (4.2). Poiché $\|x_n - x\|$ converge a 0, per n sufficientemente grande si ha che $2\|x_n - x\| - \delta d < 0$, quindi

$$\left\| \frac{P_C(x) + P_C(x_n)}{2} - x_n \right\| < d_n,$$

che è assurdo in quanto, essendo C convesso, $\frac{P_C(x) + P_C(x_n)}{2} \in C$ per ogni n . $\square$

Esercizio 4.7. Dato $M \subset X$ sottospazio vettoriale di X spazio di Banach, defi-

niamo

$$M^\perp = \{F \in X^* : F(x) = 0 \quad \forall x \in M\}.$$

Consideriamo inoltre X^* lo spazio duale di X , e dato $N \subset X^*$ sottospazio vettoriale di X^* definiamo

$$N^\perp = \{x \in X : F(x) = 0 \quad \forall F \in N\}.$$

(1) Provare che

$$(M^\perp)^\perp = \overline{M},$$

dove $\overline{M}$ indica la chiusura di M rispetto alla topologia forte definita su X .

(2) Provare che

$$\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp,$$

dove $\overline{N}$ indica la chiusura di N rispetto alla topologia forte definita su X^* .

(3) Si provi che se X è riflessivo vale l'uguaglianza anche nel secondo caso.

Dimostrazione. (1) Osserviamo che, essendo $M^\perp$ un sottospazio di X^* , possiamo definire

$$(M^\perp)^\perp = M^{\perp\perp} = \{x \in X : F(x) = 0 \quad \forall F \in M^\perp\},$$

che è evidentemente un sottospazio di X contenente M . Proviamo che $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$. Se dimostriamo che $M^{\perp\perp}$ è chiuso rispetto alla topologia forte allora deve essere necessariamente $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$ dal momento che $M^{\perp\perp}$ è un chiuso contenente M . Allora per il teorema 4.1 è sufficiente provare che $M^{\perp\perp}$ è debolmente chiuso. Sia x_n una successione in $M^{\perp\perp}$ che converge debolmente a x e $F \in M^\perp$, allora $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$, cioè $x \in M^{\perp\perp}$.

Supponiamo per assurdo che esista $x \in M^{\perp\perp}$ tale che $x \notin \overline{M}$: per il corollario 2.2 del teorema di Hahn-Banach esiste F in $M^\perp$ tale che $F(x) \neq 0$. Questo implica che $x \notin M^{\perp\perp}$ che è assurdo, dunque $x \in \overline{M}$. Si conclude che $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

(2) Consideriamo

$$(N^\perp)^\perp = N^{\perp\perp} = \{F \in X^* : F(x) = 0 \quad \forall x \in N^\perp\},$$

e dimostriamo che $N^{\perp\perp} = \tilde{N}$, dove $\tilde{N}$ indica la chiusura di N rispetto alla topologia debole $*$ definita su X^* .

Proviamo che $N^{\perp\perp}$ è chiuso debole $*$. Sia $(F_k) \subset N^{\perp\perp}$ una successione di funzionali che converge debole $*$ a F ; allora per ogni $x \in X$ la successione di numeri reali $F_k(x)$ converge a $F(x)$. Se consideriamo in particolare $x \in N^\perp$, $F(x) = 0$, ovvero $F \in N^{\perp\perp}$. Quindi $N^{\perp\perp}$ è chiuso rispetto alla topologia debole $*$, e dal momento che $N^{\perp\perp}$ contiene N , segue che $N^{\perp\perp} \supset \tilde{N}$.

Ora, dal fatto che la convergenza forte implica quella debole $*$, $\overline{N} \subset \tilde{N}$, da cui

segue la tesi.

(3) Se lo spazio X è riflessivo la topologia debole $*\sigma(X^*, X)$ e la topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$ coincidono, per cui $N^{\perp\perp}$ è anche chiuso nella topologia debole definita su X^* , e quindi per il teorema 4.1 anche chiuso nella topologia forte. Applicando gli stessi ragionamenti fatti nel punto (1) si ottiene anche in questo caso l'uguaglianza $\overline{N} = N^{\perp\perp}$. $\square$

Per la risoluzione dell'esercizio 4.8 utilizzeremo il lemma di Mazur che enunciamo e dimostriamo qui di seguito.

Lemma (di Mazur). *Sia E uno spazio vettoriale normato e (u_n) una successione di elementi di E debolmente convergente ad u . Allora esiste (v_n) fortemente convergente ad u tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, v_n appartiene all'involuppo convesso di $\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k$, cioè*

$$v_n \in \text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k,$$

ovvero

$$v_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n u_k$$

con $\sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n = 1$, $\lambda_k^n \geq 0$ e $u_1, \dots, u_{k_n} \in \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k$.

Dimostrazione. La successione (u_n) converge debolmente a u in E , allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$u \in \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^w,$$

dove con l'apice w si intende la chiusura nella topologia debole di E . Dal momento che

$$u \in \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^w \subseteq \text{co} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^w \quad (4.3)$$

e vale, per il teorema 4.1

$$\overline{\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^w = \overline{\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^s, \quad (4.4)$$

dove l'apice s è relativo alla chiusura nella topologia forte di E , segue che

$$u \in \overline{\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^s \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Si ha quindi che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $v_n \in \text{co}(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k)$ tale che $\|v_n - u\| < \frac{1}{n}$, per cui resta definita una successione $(v_n) \subset E$ che converge ad u nella topologia forte di E . $\square$

Esercizio 4.8. Sia E uno spazio di Banach, $(u_n) \subset E$ e siano K_n i chiusi nella topologia forte definiti da

$$K_n = \overline{\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^s.$$

Valgono le seguenti implicazioni:

(1) se (u_n) converge debolmente ad u allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{u\};$$

(2) se E è riflessivo e (u_n) è limitata e si ha

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{u\}$$

allora (u_n) converge debolmente a u .

Dimostrazione. (1) Per il lemma di Mazur appena dimostrato, poiché u_n converge debolmente a u esiste $(v_n) \subset E$ tale che $v_n \in \text{co}(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e v_n converge in norma ad u . Dunque

$$u \in \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} v_k}^s \subset \overline{\text{co} \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k}^s = K_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove l'ultima inclusione segue dal fatto che $v_m \in \text{co}(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k)$ per ogni $m \geq n$. Dunque

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = K.$$

Proviamo adesso che u è l'unico elemento di tale intersezione. Sia $w \in K$; poiché w appartiene alla chiusura di $\text{co}(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora per ogni n esiste $y_n \in \text{co}(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k)$, $y_n = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n u_k$ (con $\lambda_k^n \geq 0$, per ogni $k = 1, \dots, k_n$, $\sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n = 1$ e $u_1, \dots, u_{k_n} \in \bigcup_{k=n}^{\infty} u_k$) tale che $\|w - y_n\| < \frac{1}{n}$. Fissiamo $F \in E^*$ con $F \neq 0$; per ipotesi $F(u_n) \rightarrow F(u)$. Dunque, sfruttando

evidenti maggiorazioni, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |F(u) - F(w)| &\leq |F(u) - F(y_n)| + |F(y_n) - F(w)| \leq \\ &\leq \left| F\left(\sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n (u - u_k)\right) \right| + \|F\| \|y_n - w\| < \\ &< \left| \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_k^n F(u - u_k) \right| + \|F\| \frac{1}{n} < \varepsilon + \|F\| \frac{1}{n} \end{aligned}$$

e quindi, poiché la precedente relazione vale per ogni $n \geq n_\varepsilon$ e per ogni $\varepsilon > 0$ segue che $F(u) = F(w)$, e questo vale per ogni $F \in E^*$ fissato. Da $F(u) = F(w)$ segue che

$$F(u - w) = 0 \quad \text{per ogni } F \in E^*. \quad (4.5)$$

Supponiamo $u - w \neq 0$, allora per quanto dimostrato nell'esercizio 2.10 esiste $F_0 \in E^*$ tale $\|F_0\| = 1$ e $F_0(u - w) = \|u - w\| \neq 0$, che è in contraddizione con (4.5). Quindi necessariamente $u = w$.

(2) Consideriamo il sottoinsieme chiuso nella topologia forte definito da

$$K_1 = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} u_k}^s.$$

Essendo per ipotesi (u_n) limitata, si ha che K_1 è limitato, convesso e chiuso rispetto alla topologia forte. L'ipotesi aggiuntiva di riflessività di E ci permette di dedurre che K_1 è compatto nella topologia debole, applicando il teorema 4.2. Osserviamo che tutte le sottosuccessioni di (u_n) sono contenute in K_1 . Allora per il teorema 4.4 ogni sottosuccessione di (u_n) ammette una sottosuccessione debolmente convergente, ovvero, presa $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ esistono $(u_{n_{k_h}}) \subset (u_{n_k})$ e $y \in E$ tali che $u_{n_{k_h}} \rightharpoonup y$. Proviamo che $y = u$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ definiamo il chiuso T_h nella topologia debole

$$T_h = \overline{\bigcup_{i=h}^{\infty} u_{n_{k_i}}}^w,$$

ed osserviamo che

$$T_h \subset \overline{\bigcup_{k=h}^{\infty} u_{n_k}}^w \subset \overline{\bigcup_{n=h}^{\infty} u_n}^w \subset \overline{\text{co} \bigcup_{n=h}^{\infty} u_n}^s = K_h \quad \forall h \in \mathbb{N},$$

dove abbiamo utilizzato le inclusioni (4.3) e (4.4) della dimostrazione del lemma di Mazur.

Dunque, tenuto conto di quanto abbiamo provato nella prima parte dell'esercizio e dell'ipotesi, possiamo affermare che

$$y \in \bigcap_{h=1}^{\infty} T_h \subset \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h = \{u\},$$

che implica $y = u$.

Abbiamo quindi dimostrato che ogni sottosuccessione (u_{n_k}) di (u_n) ammette una sottosuccessione $(u_{n_{k_h}})$ che converge debolmente a u . Passando all'equivalente convergenza in $\mathbb{R}$ con i funzionali di E^* , si ha che, per ogni $F \in E^*$, ogni sottosuccessione di $F(u_n)$ ammette una sottosuccessione convergente a $F(u)$, da cui si può concludere, usando una nota proprietà delle successioni numeriche, che $u_n \rightharpoonup u$ $\square$

Esercizio 4.9. (1) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile e sia $1 \leq p \leq +\infty$. Dimostrare che

$$C = \{u \in L^p(\Omega) : u \geq f \text{ q.o.}\}$$

è chiuso nella topologia debole di L^p per $1 \leq p < +\infty$, e in quella debole $*$ per $p = +\infty$.

(2) Siano f_1, f_2 due funzioni di $L^\infty(\Omega)$ con $f_1 \leq f_2$ quasi ovunque. Dimostrare che

$$B = \{u \in L^\infty(\Omega) : f_1 \geq u \geq f_2 \text{ q.o.}\}$$

è compatto nella topologia debole $*$ di $L^\infty(\Omega)$.

Dimostrazione. (1) Consideriamo il caso $1 \leq p < \infty$. Osserviamo subito che C è convesso; infatti, se $u, v \in C$ e $t \in [0, 1]$, vale che

$$(1-t)u + tv \geq (1-t)f + tf = f \text{ q.o. in } \Omega,$$

e perciò $(1-t)u + tv \in C$. In virtù del teorema 4.1 per provare che C è debolmente chiuso basta quindi verificare che è chiuso per la topologia forte. Sia $(u_n) \subset C$ convergente ad u nella topologia forte, allora esiste un'estratta che converge ad u quasi ovunque, quindi $u \geq f$ quasi ovunque in Ω , dal momento che $u_n \geq f$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sia ora $p = +\infty$. Mostriamo dapprima che C coincide con l'insieme A delle funzioni $u \in L^\infty(\Omega)$ tali che

$$\int_{\Omega} u \varphi dx \geq \int_{\Omega} f \varphi dx$$

per ogni $\varphi \in L^1(\Omega)$ tale che $\varphi \geq 0$ quasi ovunque e $f\varphi \in L^1(\Omega)$.

Dimostriamo l'inclusione non banale, ovvero $A \subseteq C$. Sia $u \in A$ e supponiamo che

$f \in L^\infty(\Omega)$. Dal fatto che

$$\int_{\Omega} (u - f) \varphi dx \geq 0$$

segue che $u \geq f$ quasi ovunque. Infatti se così non fosse, esisterebbe $M \subset \Omega$ limitato e di misura non nulla, su cui $u - f < 0$. Scelta $\varphi = \chi_M$ la funzione caratteristica di M , dal momento che $u \in A$ si avrebbe

$$0 \leq \int_{\Omega} (u - f) \chi_M dx = \int_M (u - f) dx < 0.$$

Passiamo adesso al caso generale in cui f sia misurabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\omega_n = \{x \in \Omega : |f(x)| < n\}.$$

Scelta φ come sopra, poniamo $\varphi_n = \varphi \chi_{\omega_n}$; si ha che per $u \in A$

$$\int_{\omega_n} u \varphi dx = \int_{\Omega} u \varphi_n dx \geq \int_{\Omega} f \varphi_n dx = \int_{\omega_n} f \varphi dx$$

Allora essendo $f \in L^\infty(\omega_n)$ risulta, per quanto dimostrato, che $u \geq f$ quasi ovunque in ω_n . La tesi segue osservando che i sottoinsiemi ω_n tendono a Ω per $n \rightarrow +\infty$, quindi $f \geq u$ quasi ovunque in Ω e $u \in C$.

Proviamo che C è chiuso nella topologia debole *. Sia $(u_n) \subset C$, convergente debole * ad u . Vale quindi

$$\int_{\Omega} u_n g dx \rightarrow \int_{\Omega} u g dx$$

per ogni $g \in L^1(\Omega)$, e in particolare per le funzioni φ considerate precedentemente, tali che $\varphi \in L^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ quasi ovunque e $f\varphi \in L^1(\Omega)$. Essendo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} u_n \varphi dx \geq \int_{\Omega} f \varphi dx$$

passando al limite si ottiene che $u \in A$ e quindi $u \in C$.

(2) Poniamo

$$B_1 = \{u \in L^\infty(\Omega) : f_1 \geq u \text{ q.o.}\}$$

e

$$B_2 = \{u \in L^\infty(\Omega) : u \geq f_2 \text{ q.o.}\}.$$

Poiché per quanto dimostrato in (1) B_1 e B_2 sono chiusi rispetto alla topologia debole * in $L^\infty(\Omega)$, e $B = B_1 \cap B_2$, allora anche B è chiuso nella topologia debole *

*. Inoltre essendo f_1, f_2 in $L^\infty(\Omega)$ se $u \in B$ si ha quasi ovunque in Ω che

$$-\|f_2\|_\infty \leq u \leq \|f_1\|_\infty$$

e dunque

$$B \subset \{u \in L^\infty(\Omega) : \|u\|_\infty \leq \alpha\} = B_\alpha$$

per un certo $\alpha > 0$. Per il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki 4.5 B_α è compatto debole * in $L^\infty(\Omega)$. Poiché un sottoinsieme chiuso di un compatto è compatto, segue la tesi. $\square$

Esercizio 4.10. Sia $w_n(t)$ una successione di funzioni in $L^2(0,1)$ così definite:

$$w_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}); \\ n, & \text{se } t \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}); \\ 0, & \text{se } t \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}, 1). \end{cases}$$

Provare che la successione converge debolmente ma non fortemente in $L^2(0,1)$.

Dimostrazione. Osserviamo che $w_n(t)$ converge a 0 quasi ovunque in $(0,1)$, per cui se la successione convergesse nella topologia forte, il limite dovrebbe essere 0. Ma poiché, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|w_n\|_2 &= \left(\int_0^1 |w_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}} n^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left[n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0 \end{aligned}$$

segue che non ci può essere convergenza forte.

Proviamo ora che w_n converge debolmente a 0, cioè mostriamo che per ogni $v \in L^2(0,1)$

$$\int_0^1 w_n(x)v(x)dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Dal momento che $C_0^0(0,1)$ è denso in $L^2(0,1)$ per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v_\varepsilon \in C_0^0(0,1)$ tale che $\|v - v_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$. Dunque, applicando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 w_n(x)v(x)dx \right| &= \left| \int_0^1 w_n(v - v_\varepsilon + v_\varepsilon)dx \right| = \left| \int_0^1 w_n(v - v_\varepsilon)dx \right| + \left| \int_0^1 w_nv_\varepsilon dx \right| \leq \\ &\leq \|w_n\|_2 \|v - v_\varepsilon\|_2 + \left| \int_0^1 w_nv_\varepsilon dx \right| < \sqrt{2}\varepsilon + \left| \int_0^1 w_nv_\varepsilon dx \right|. \end{aligned}$$

Ora, poiché $v_\varepsilon \in C_0^0(0, 1)$, esiste $M > 0$ tale che $|v_\varepsilon(x)| \leq M$ per ogni $x \in (0, 1)$, quindi

$$\left| \int_0^1 w_n v_\varepsilon dx \right| \leq \int_0^1 |w_n v_\varepsilon| dx \leq M \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}} n dx = M \cdot \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

per cui si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \int_0^1 w_n v dx \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > n_0,$$

cioè $\int_0^1 w_n v dx \rightarrow 0$ e quindi w_n converge debolmente a 0 in $L^2(0, 1)$. □

Esercizio 4.11. Si studi la convergenza forte e debole in $L^p([0, 1])$, con $p \in (1, +\infty)$, della successione

$$f_n(x) = n^{\frac{1}{p}} e^{-nx}.$$

Dimostrazione. La successione converge a zero quasi ovunque. Passiamo a valutare la convergenza forte in $L^p([0, 1])$. Osserviamo che

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p dx = \int_0^1 n e^{-pnx} dx = \frac{1 - e^{-pn}}{p} \leq \frac{1}{p},$$

e quindi la successione non può convergere fortemente a zero, poiché

$$\|f_n\|_p = \left(\frac{1 - e^{-pn}}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \left(\frac{1}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \neq 0.$$

Vediamo invece che la successione converge a zero debolmente. Si deve allora mostrare che per ogni $g \in L^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, risulta

$$\int_0^1 f_n(x) g(x) dx \rightarrow 0.$$

Cominciamo considerando $g \in C_0^\infty([0, 1])$. Si ha allora che

$$\int_0^1 f_n(x) g(x) dx = \left[-\frac{f_n(x)}{n} g(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{f_n(x)}{n} g'(x) dx.$$

Il primo dei due addendi è zero, poiché $g \in C_0^\infty([0, 1])$, mentre per il secondo

applicando la disuguaglianza di Hölder si può dare la seguente stima:

$$\left| \int_0^1 \frac{f_n(x)}{n} g'(x) dx \right| \leq \left\| \frac{f_n}{n} \right\|_p \|g'\|_{p'}.$$

Dal momento che

$$\left\| \frac{f_n}{n} \right\|_p^p = \int_0^1 n^{1-p} e^{-pnx} dx = \frac{1 - e^{-pn}}{pn^p} < \frac{1}{pn^p} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

segue la tesi. Se consideriamo $g \in L^{p'}([0, 1])$, allora per la densità di C_0^∞ in $L^{p'}$ esiste una successione $(g_n) \subset C_0^\infty([0, 1])$ che converge fortemente a g in $L^{p'}$. Dunque, per $n \rightarrow +\infty$

$$\int_0^1 f_n(x) g(x) dx \leq \|f_n\|_p \|g - g_n\|_{p'} + \int_0^1 f_n(x) g_n(x) dx \rightarrow 0,$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Esercizio 4.12. Sia $u_n(t)$ una successione di funzioni definite nell'intervallo $(0, 1)$ nel modo seguente

$$u_n(t) = \begin{cases} n^\alpha, & \text{se } t \in (0, \frac{1}{n}); \\ 0, & \text{se } t \in (\frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Allora la successione u_n converge a zero in norma L^p per ogni $\alpha \in (0, \frac{1}{p})$ e per ogni $p \geq 1$, mentre per $\alpha = \frac{1}{p}$ la successione converge a zero debolmente ma non fortemente.

Dimostrazione. La convergenza in norma segue facilmente da un calcolo diretto, infatti

$$\|u_n\|_p^p = \int_0^1 |u_n(x)|^p dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (n^\alpha)^p dx = n^{\alpha p} \frac{1}{n} = n^{\alpha p - 1},$$

quindi $\|u_n\|_p$ converge a zero se e solo se $\alpha p - 1 < 0$, cioè se e solo se $\alpha < \frac{1}{p}$.

Analizziamo adesso il caso $\alpha = \frac{1}{p}$. Si vuole mostrare che la successione u_n converge debolmente a zero in L^p , cioè si vuole verificare che comunque scelta una funzione v nello spazio L^q (con q esponente coniugato di p , cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) si ha che

$$\int_0^1 u_n(x) v(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

In realtà è sufficiente dimostrarlo per funzioni semplici a scala su sottointervalli di $[0, 1]$; per densità vale poi per ogni funzione in L^q .

Si prenda dunque $h(x)$ una funzione a scala nell'intervallo $[0, 1]$; quindi $h(x)$ sarà del tipo $h(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}$ dove χ è la funzione caratteristica ed i sottointervalli $[a_i, a_{i+1}]$ formano una partizione dell'intervallo $[0, 1]$ (quindi $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N = 1$). Osserviamo che esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $\frac{1}{n}$ è minore di a_1 ed in particolare questo vale definitivamente. Quindi per n sufficientemente grande si ha

$$\int_0^1 u_n(x) h(x) dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \lambda_0 n^{\frac{1}{p}} dx = \lambda_0 n^{\frac{1}{p}-1}$$

che converge a zero essendo $\frac{1}{p} - 1 < 0$.

Prendiamo infine una funzione $v(x)$ appartenente a L^q e fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste allora una funzione a scala $h(x)$ che approssima $v(x)$, cioè per cui valga $\|v - h\|_q < \varepsilon$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_n(x) v(x) dx &= \int_0^1 u_n(x) (v(x) - h(x)) dx + \int_0^1 u_n(x) h(x) dx \leq \\ &\leq \|v - h\|_q \|u_n\|_p + \int_0^1 u_n(x) h(x) dx. \end{aligned}$$

Ricordando che $\|u_n\|_p \leq 1$, $\|v - h\|_q \leq \varepsilon$ e che $\int_0^1 u_n(x) h(x) dx$ converge a zero, segue la tesi. $\square$

Esercizio 4.13. Indichiamo con Ω l'intervallo $(0, 2\pi)$ e definiamo in Ω la successione di funzioni $u_k(x) = \sin(kx)$. Allora u_k converge a zero debolmente in $L^p(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ e debolmente $*$ in $L^\infty(\Omega)$, ma non converge forte in $L^p(\Omega)$ per alcun p .

Dimostrazione. Consideriamo $u(x) = \sin x \in L^p(\Omega)$ per $1 \leq p \leq +\infty$. Allora $u_k(x) = \sin(kx) = u(kx)$. Per il teorema di Riemann-Lebesgue 4.6 u_k converge debolmente per $1 \leq p < +\infty$ e debolmente $*$ per $p = +\infty$ alla funzione

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sin x dx = 0.$$

Vediamo che però u_k non può convergere in norma L^p a 0. Infatti se consideriamo $\|u_k\|_p^p$ si ha che

$$\|u_k\|_p^p = \int_0^{2\pi} |u(kx)|^p dx = \frac{1}{k} \int_0^{2k\pi} |u(y)|^p dy = \frac{1}{k} \cdot k \int_0^{2\pi} |u(y)|^p dy = \|u\|_p^p,$$

quindi $\|u_k\|_p = \|u\|_p$, che è strettamente positiva. $\square$

Esercizio 4.14. Fissiamo α e β due numeri reali positivi e distinti. Definiamo la funzione $u(x)$ su tutto l'asse reale estendendo in modo periodico la funzione

seguente definita nell'intervallo $(0, 1)$

$$u(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x \in (0, \frac{1}{2}); \\ \beta, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Sia $u_k(x) = u(kx)$ per $k \in \mathbb{N}$. Allora la successione u_k converge debolmente a $\frac{\alpha+\beta}{2}$ in $L^p(0, 1)$ per $1 \leq p < +\infty$, e debole $*$ in $L^\infty(0, 1)$, ma non converge in norma L^p per nessun p .

Dimostrazione. Il teorema di Riemann-Lebesgue 4.6 assicura che $u_k(x)$ converge debolmente in $L^p(0, 1)$ con $1 \leq p < +\infty$ e debole $*$ in L^∞ alla funzione

$$\bar{u} = \int_0^1 u(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \alpha dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta dx = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Verifichiamo adesso che la successione non converge in norma L^p per alcun p .

Se u_k ammettesse limite nella topologia forte di L^p sarebbe uguale al limite debole $\bar{u}(x)$, e dovrebbe valere $\|u_k\|_p \rightarrow \|\bar{u}\|_p$.

Ma

$$\|u_k\|_p^p = \|u\|_p^p = \int_0^{\frac{1}{2}} \alpha^p dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \beta^p dx = \frac{\alpha^p + \beta^p}{2},$$

dove l'uguaglianza tra le norme si ottiene come nell'esercizio 4.13, mentre

$$\|\bar{u}\|_p^p = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^p,$$

quindi $\|u_k\|_p$ è diversa da $\|\bar{u}\|_p$ per ogni $p \neq 1$.

Analizziamo a parte il caso $p = 1$.

$$\begin{aligned} \left\| u_k - \frac{\alpha + \beta}{2} \right\|_1 &= \int_0^1 \left| u_k(x) - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| dx = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\int_{\frac{2m}{2k}}^{\frac{2m+1}{2k}} \left| \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| dx + \int_{\frac{2m+1}{2k}}^{\frac{2m+2}{2k}} \left| \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right| dx \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \frac{|\alpha - \beta|}{2k} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}, \end{aligned}$$

che non converge a zero. □

Capitolo 5

Spazi di Hilbert ed applicazioni

5.1 Introduzione

Se la norma definita su uno spazio vettoriale è associata ad un *prodotto scalare*, allora si può dire che lo spazio possiede proprietà geometriche analoghe a quelle degli spazi euclidei, e in esso si possono misurare gli angoli tra due suoi elementi, oltre che la loro distanza reciproca. Se lo spazio è completo rispetto a questa norma si parla di *spazio di Hilbert*. Si può dimostrare che negli spazi di Hilbert ogni vettore è dotato di proiezione su un qualunque sottoinsieme chiuso e convesso, dunque su ogni sottospazio chiuso e, come conseguenza, ogni spazio di Hilbert è riflessivo e può essere identificato con il suo spazio duale (come avviene per gli spazi a dimensione finita). Il teorema della proiezione può essere inoltre generalizzato al caso di forme bilineari, da cui discende il teorema di Lax-Milgram, che ha importanti applicazioni nello studio delle equazioni differenziali come vedremo nel prossimo capitolo.

Infine si può affermare che gli spazi di Hilbert separabili rappresentano una sorta di generalizzazione degli spazi a dimensione finita.

Enunciamo di seguito i principali teoremi a cui faremo riferimento.

Teorema 5.1 (Proiezione su un convesso chiuso). *Sia $K \subset H$ un convesso chiuso e non vuoto dello spazio di Hilbert H . Allora per ogni $f \in H$ esiste un unico $\bar{u} \in K$ tale che*

$$\text{dist}(f, K) = \inf\{\|f - v\|, v \in K\} = \|f - \bar{u}\|.$$

Il vettore $\bar{u} \in K$ è detto proiezione ortogonale di f su K , e si scrive $\bar{u} = P_K(f)$, ed è caratterizzato dalla proprietà

$$(f - \bar{u}, v - \bar{u}) \leq 0 \quad \text{per ogni } v \in K.$$

Inoltre l'operatore P_K che associa ad ogni elemento di H la sua proiezione su K è un operatore continuo.

Teorema 5.2 (Proiezione su un sottospazio chiuso). *Sia $M \subset H$ un sottospazio chiuso dello spazio di Hilbert H . Allora per ogni $f \in H$ esiste un unico $\bar{u} = P_M(f) \in M$ tale che*

$$(f - \bar{u}, v) = 0 \quad \text{per ogni } v \in M.$$

Inoltre l'operatore di proiezione P_M che ad ogni $f \in H$ associa la sua proiezione su M è lineare e continuo.

Teorema 5.3 (di rappresentazione di Riesz). *Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $f \in H$ tale che*

$$F(v) = (f, v) \quad \text{per ogni } v \in H,$$

ed inoltre

$$\|F\|_{H^*} = \|f\|_H.$$

Teorema 5.4 (Lax-Milgram). *Sia a una forma bilineare continua e coerciva. Per ogni $F \in H^*$ esiste un unico $\bar{u} \in H$ tale che*

$$a(\bar{u}, v) = F(v) \quad \text{per ogni } v \in H.$$

Se inoltre a è simmetrica, allora $\bar{u}$ soddisfa anche il seguente problema di minimo, detto principio di Dirichlet astratto

$$J(\bar{u}) = \min_{v \in M} J(v),$$

dove $J(v)$ è il funzionale su M definito da

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - F(v).$$

Ricordiamo infine come si calcola la proiezione di un elemento appartenente ad uno spazio di Hilbert H su un suo sottospazio chiuso di dimensione finita. Utilizziamo il *procedimento di Gram-Schmidt* che permette di costruire una successione ortonormale di vettori data una successione di elementi linearmente indipendenti nello spazio. Sia H uno spazio di Hilbert, $Y \subset H$ un suo sottospazio chiuso di dimensione finita N . Siano $y_1, \dots, y_N \in Y$ linearmente indipendenti. Si può allora costruire una base ortonormale $\{e_1, \dots, e_N\}$ per Y nel seguente modo:

- $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|};$

- per ogni $k = 2, \dots, N$

$$e_k = \frac{\tilde{e}_k}{\|\tilde{e}_k\|}, \quad \text{dove} \quad \tilde{e}_k = y_k - \sum_{i=1}^{k-1} (y_k, e_i) e_i.$$

La proiezione di un generico elemento $u \in H \setminus Y$ è data da

$$P_Y(u) = \sum_{i=1}^N (u, e_i) e_i.$$

5.2 Esercizi

Ricordiamo il *principio di dualità* negli spazi normati:

Teorema. *Sia X uno spazio normato, L un suo sottospazio e $p \in X \setminus L$. Definito l'insieme*

$$L^\perp = \{F \in X^* : F(x) = 0 \quad \forall x \in L\}.$$

consideriamo i seguenti problemi:

$$(P) \quad \alpha = \inf\{\|x - p\| : x \in L\};$$

$$(P^*) \quad \beta = \sup\{F(p) : F \in L^\perp, \|F\| \leq 1\}.$$

Risulta allora che:

(i) (P^*) ha sempre soluzione che ha norma unitaria;

(ii) $\beta = \alpha$.

Il seguente esercizio può essere considerato come un'estensione del principio di dualità agli spazi di Hilbert.

Esercizio 5.1. *Sia H uno spazio di Hilbert, M un suo sottospazio chiuso e $p \in H \setminus M$. Allora*

$$\min\{\|x - p\| : x \in M\} = \max\{(p, y) : y \in M^\perp, \|y\| = 1\},$$

dove $M^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0 \quad \forall v \in M\}$.

Dimostrazione. Dal teorema di rappresentazione di Riesz 5.3 discende che l'insieme dei funzionali nulli su M si identifica con $M^\perp$ ed inoltre ci si può limitare a considerare quelli di norma unitaria poiché la soluzione del problema (P^*) ha questa proprietà. Tenendo conto di queste osservazioni è sufficiente riscrivere la tesi del

principio di dualità rappresentando i funzionali con i prodotti scalari. Appliciamo questo risultato ad un esempio. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{G} = \left\{ g \in L^2([0, 1]) : \int_0^1 g(x) dx = 0, \|g\|_2 = 1 \right\}.$$

Si vede facilmente che $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}^\perp$ è il sottoinsieme di $\mathcal{A}^\perp$ formato dalle funzioni di norma unitaria, dove

$$\mathcal{A} = \{ f \in L^2([0, 1]) : f \text{ è costante q.o.} \} = \text{span}(1),$$

con $f = 1$ la funzione uguale a 1 quasi ovunque, che è un sottospazio di dimensione finita e quindi chiuso in $L^2([0, 1])$ (vedi osservazione).

Consideriamo il seguente problema

$$\max_{g \in \mathcal{G}} \int_0^1 g(t) e^t dt.$$

Per il principio di dualità possiamo riscrivere il problema come problema di minimo nel modo seguente

$$\max_{g \in \mathcal{G}} \int_0^1 g(t) e^t dt = \max_{g \in \mathcal{A}^\perp, \|g\|_2=1} \int_0^1 g(t) e^t dt = \min_{c \in \mathcal{A}} \sqrt{\int_0^1 |e^t - c|^2 dt}.$$

Si noti che per il calcolo del secondo termine si può procedere come vedremo nell'esercizio 5.2, utilizzando il teorema della proiezione 5.2. In questo caso però è più semplice lavorare con le tecniche di ricerca di minimi per funzioni di una variabile reale.

La soluzione del problema di minimo è allora

$$\sqrt{-\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{3}{2}},$$

valore assunto in $c = e - 1 \in \mathcal{A}$, che risulta essere la funzione costante che meglio approssima e^t in norma quadratica. $\square$

Osservazione. *Nello svolgimento dell'esercizio 5.1 e negli esercizi seguenti, utilizziamo il seguente risultato, di cui diamo la dimostrazione. Sia X uno spazio normato, $V \subset X$ un sottospazio di X di dimensione finita. Allora V è chiuso in X .*

Dimostrazione. Basta dimostrare che V è completo in X . Infatti, consideriamo una successione $(v_n) \subset V$ tale che $v_n \rightarrow v$ per $n \rightarrow +\infty$. Dal momento che è

convergente, v_n è di Cauchy in V . Se V è completo allora esiste $y \in V$ tale che $v_n \rightarrow y \in V$, e per l'unicità del limite segue che $v = y \in V$, dunque V è chiuso. Proviamo allora che V è completo. Sia $(v_n) \subset V$ una successione di Cauchy in V : per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > n_0$, $\|v_n - v_m\| < \varepsilon$. Dimostriamo che v_n converge in V . Per ipotesi V ha dimensione finita N ; sia $\{u_1, \dots, u_N\}$ una sua base. Allora esistono $\lambda_1^n, \dots, \lambda_N^n \in \mathbb{R}$ tali che $v_n = \sum_{i=1}^N \lambda_i^n u_i$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dal fatto che v_n è di Cauchy, segue che

$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\| &= \|\lambda_1^n u_1 + \dots + \lambda_N^n u_N - \lambda_1^m u_1 - \dots - \lambda_N^m u_N\| \leq \\ &\leq \|u_1\| \|\lambda_1^n - \lambda_1^m\| + \dots + \|u_N\| \|\lambda_N^n - \lambda_N^m\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

ovvero la successione λ_i^n è di Cauchy in $\mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, N$, dunque converge ad un certo $\lambda_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, N$.

Proviamo che v_n converge all'elemento $v = \sum_{i=1}^N \lambda_i u_i \in V$. Infatti

$$\begin{aligned} \|v_n - v\| &= \|(\lambda_1^n - \lambda_1)u_1 + \dots + (\lambda_N^n - \lambda_N)u_N\| \leq \\ &\leq \|\lambda_1^n - \lambda_1\| \|u_1\| + \dots + \|\lambda_N^n - \lambda_N\| \|u_N\|, \end{aligned}$$

da cui segue che $\|v_n - v\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. □

Esercizio 5.2. (1) *Calcolare*

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx.$$

(2) *Studiare*

$$\max \int_{-1}^1 g(x)x^3 dx$$

nella classe delle funzioni $g \in L^2([-1, 1])$ tali che

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 g(x)x^2 dx = \int_{-1}^1 g(x)x dx = 0 \quad e \quad \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

Dimostrazione. : (1) Utilizziamo le tecniche degli spazi di Hilbert. Sia $V = \text{span}(1, x, x^2)$ il sottospazio chiuso e non vuoto di $L^2([-1, 1])$ (vedi esercizio 5.1) e $f(x) = x^3 \in L^2([-1, 1]) \setminus V$. Osserviamo che, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a + bx + cx^2 \in V$, quindi

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx = \min_{v \in V} \|f - v\|_2^2.$$

È sufficiente studiare

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{R}} \|x^3 - a - bx - cx^2\|_2.$$

In base al teorema della proiezione 5.2, esiste un unico $\alpha + \beta x + \gamma x^2 \in V$ (la proiezione di $f(x) = x^3$ su V), tale che

$$\|x^3 - \alpha - \beta x - \gamma x^2\|_2 = \min \{ \|x^3 - a - bx - cx^2\|_2, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \}.$$

Si deve quindi calcolare la proiezione di x^3 su V , che indicheremo con $P_V(x^3)$. Data $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale di V ,

$$P_V(x^3) = (x^3, e_1)e_1 + (x^3, e_2)e_2 + (x^3, e_3)e_3.$$

Per costruire una base ortonormale per V , utilizziamo il metodo di Gram-Schmidt a partire dagli elementi linearmente indipendenti $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$.

Dal momento che $e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = 1$, ed $\tilde{e}_2 = f_2 - (f_2, e_1)e_1 = x$, si ricava

$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2}{\|\tilde{e}_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Infine, poiché $\tilde{e}_3 = f_3 - (f_3, e_1)e_1 - (f_3, e_2)e_2 = x^2 - \frac{2}{3}$ si ottiene

$$e_3 = \frac{\tilde{e}_3}{\|\tilde{e}_3\|} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right).$$

Abbiamo dunque ottenuto la seguente base ortonormale per V

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Allora

$$P_V(x^3) = (x^3, 1)1 + \left(x^3, \sqrt{\frac{3}{2}}x \right) \sqrt{\frac{3}{2}}x + \left(x^3, \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) \right) \sqrt{\frac{5}{2}} \left(x^2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{5}x.$$

Il valore minimo cercato si otterrà in corrispondenza della proiezione $P_V(x^3)$. Risulta quindi

$$\int_{-1}^1 \left| x^3 - \frac{3}{5}x \right|^2 dx = \frac{8}{175}.$$

(2) Sia $V = \text{span}(1, x, x^2) \subset L^2([-1, 1])$. In base al teorema 5.3 di rappresentazione per funzionali su spazi di Hilbert la classe delle funzioni g si può identificare con la classe dei funzionali $F \in (L^2)^*$ tali che $F(1) = F(x) = F(x^2) = 0$ e

$\|F\|_2 = 1$, cioè gli $F \in (L^2)^*$ di norma unitaria tali che $F \in V^\perp$.
Il problema in questione si può quindi formalizzare come

$$\max\{F(x^3) : \|F\| = 1, F \in V^\perp\}. \quad (5.1)$$

Per il principio di dualità la (5.1) è equivalente a

$$\inf\{\|x^3 - a - bx - cx^2\|_2, (a + bx + cx^2) \in V\},$$

che per quanto detto al punto (1) è raggiunto nel punto $\frac{3}{5}x \in V$. Si conclude quindi che l'estremo inferiore è un minimo il cui valore, in base ai calcoli svolti nel punto (1), è $\sqrt{\frac{8}{175}}$. $\square$

Esercizio 5.3. Si consideri lo spazio di Hilbert $H = L^2([0, 1])$ e se ne consideri il sottospazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2, cioè lo spazio $\mathcal{P}_2 = \text{span}(1, t, t^2)$. Si studi l'operatore di proiezione di H su $\mathcal{P}_2$.

Dimostrazione. Cominciamo con il determinare una base ortonormale per $\mathcal{P}_2$ utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt. Consideriamo come elementi linearmente indipendenti $y_1 = 1, y_2 = t$ e $y_3 = t^2$.

Allora $e_1 = 1$;

$$\tilde{e}_2 = t - \left(\int_0^1 t dt\right) \cdot 1 = t - \frac{1}{2},$$

per cui

$$\|\tilde{e}_2\|_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \quad \text{ed} \quad e_2 = \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Infine

$$\tilde{e}_3 = t^2 - \left(\int_0^1 t^2 dt\right) 1 - \sqrt{12} \left(\int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) dt\right) \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2}\right) = t^2 - t + \frac{1}{6},$$

quindi

$$\|\tilde{e}_3\|_2 = \frac{1}{6\sqrt{5}} \quad \text{ed} \quad e_3 = 6\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right).$$

La base ortonormale per $\mathcal{P}_2$ trovata è data dagli elementi

$$\mathcal{B} = \left\{1, \sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\right\}.$$

Osserviamo che lo spazio $\mathcal{P}_2$ è chiuso in L^2 . Infatti si prova facilmente che l'applicazione $\phi : (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) \in \mathcal{P}_2 \longrightarrow (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ è un isomorfismo tra spazi

vettoriali, quindi $\mathcal{P}_2$ è un sottospazio di dimensione finita dello spazio di Hilbert L^2 e dunque è chiuso in L^2 (vedi esercizio 5.1). L'operatore di proiezione si può allora scrivere nel seguente modo:

$$P_{\mathcal{P}_2}(f) = \sum_{i=1}^3 (f, e_i) e_i \quad \text{per ogni } f \in L^2([0, 1]).$$

Proviamo per esempio a calcolare $P_{\mathcal{P}_2}(e^t)$. Si ha dunque:

- $(e^t, e_1) = \int_0^1 e^t dt = e - 1;$
- $(e^t, e_2) = \sqrt{12} \int_0^1 \left(e^t t - \frac{e^t}{2} \right) dt = (3 - e)\sqrt{3};$
- $(e^t, e_3) = 6\sqrt{5} \int_0^1 \left(e^t t^2 - e^t t + \frac{e^t}{6} \right) dt = (7e - 19)\sqrt{5}.$

Quindi

$$P_{\mathcal{P}_2}(e^t) = (e - 1) + (3 - e)\sqrt{3}\sqrt{12} \left(t - \frac{1}{2} \right) + (7e - 19)\sqrt{5} \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right).$$

Inoltre dal teorema della proiezione 5.2

$$\text{dist}(e^t, \mathcal{P}_2) = \|P_{\mathcal{P}_2}(e^t) - e^t\|_2 = d.$$

Applicando il principio di dualità passiamo ad una scrittura variazionale di questo problema mettendo così in luce l'efficacia della “macchina” descritta sopra nonostante i numerosi calcoli richiesti. In questo caso consideriamo lo spazio $X = L^2([0, 1])$, il sottospazio $L = \mathcal{P}_2$ e l'elemento $p(t) = e^t \in X \setminus L$. Inoltre utilizzando il teorema 5.3 di rappresentazione di Riesz possiamo identificare $L^\perp$ con l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in L^2([0, 1]) : \int_0^1 f dt = \int_0^1 f t dt = \int_0^1 f t^2 dt = 0 \right\}.$$

Abbiamo calcolato sia $P_{\mathcal{P}_2}(e^t)$ che $\text{dist}(e^t, \mathcal{P}_2)$, dunque il problema (P) ammette soluzione, e dal principio di dualità segue che abbiamo risolto anche il seguente problema espresso in forma variazionale

$$\sup_{f \in \mathcal{A}, \|f\|_2 \leq 1} \int_0^1 f e^t dt = \sup_{F \in L^\perp, \|F\| \leq 1} F(e^t) = \text{dist}(e^t, \mathcal{P}_2) = d.$$

□

Esercizio 5.4. Si considerino $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ due funzioni appartenenti allo spazio di Hilbert $L^2([0, 1])$. Si calcoli:

(1) l'angolo θ compreso tra di esse;

(2) la loro distanza reciproca;

(3) la proiezione $P_W(h)$ della funzione $h(x) = x^2$ sullo spazio $W = \text{span}(f, g)$.

Dimostrazione. (1) Ricordando che il prodotto scalare tra f e g in $L^2([0, 1])$ può essere espresso come

$$(f, g) = \|f\|_2 \|g\|_2 \cos \theta,$$

basta osservare che $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, $\|f\|_2 = 1$, ed infine $\|g\|_2^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Facendo i calcoli si ottiene che $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) Calcoliamo la distanza tra f e g .

$$\text{dist}(f, g) = \|f - g\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 |1 - x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(3) Cerchiamo adesso la proiezione della funzione $h(x)$ sullo spazio W . Con il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a partire dalle due funzioni linearmente indipendenti f e g si determina una base ortonormale $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ per W , dove

$$f_1 = 1 \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{g - (f_1, g)f_1}{\|g - (f_1, g)f_1\|_2} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\|x - \frac{1}{2}\|_2} = \left(x - \frac{1}{2}\right) 2\sqrt{3}.$$

Dal momento che W è un sottospazio chiuso di $L^2([0, 1])$ (vedi esercizio 5.1)

$$P_W(h) = (h, f_1)f_1 + (h, f_2)f_2,$$

dove $(h, f_1) = (x^2, 1) = \frac{1}{3}$ e $(h, f_2) = (x^2, \sqrt{3}(2x - 1)) = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Segue che

$$P_W(h) = \frac{1}{3} + \sqrt{3}(2x - 1) \frac{\sqrt{3}}{6} = x + \frac{1}{6}.$$

□

Osservazione. La proiezione di h sullo spazio W rappresenta la migliore approssimazione lineare della funzione $y = h(x)$, cioè $y = x + \frac{1}{6}$ è la retta che meglio approssima la parabola $y = x^2$.

Infatti la proiezione di $h(x)$ sullo spazio W è l'elemento di W , che indicheremo con z , che minimizza la distanza di h da W , cioè tale che

$$\text{dist}(h, W) = \|h - z\|_2 = \min_{w \in W} \|h - w\|_2.$$

Ricordiamo che ogni elemento di W è combinazione lineare degli elementi della base $\{1, x\}$, quindi un generico $w \in W$ è del tipo: $w = a + bx$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Per determinare $P_W(h)$, si cercano quindi due costanti reali a e b tali che $\|h - (a + bx)\|_2 = \min_{w \in W} \|h - w\|_2$ ovvero tali che valga

$$\left(\int_0^1 (h(x) - (a + bx))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \min_{w \in W} \left(\int_0^1 (h(x) - w)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per questo motivo minimizzare la distanza di h da W equivale a minimizzare l'errore quadratico medio che si compie approssimando la parabola $y = x^2$ con una retta $y = a + bx$.

Esercizio 5.5. Determinare la migliore approssimazione (rispetto alla norma di $L^2(-1, 1)$) della funzione $y = \sin x$ con un polinomio di terzo grado.

Dimostrazione. Per quanto osservato nell'esercizio 5.4, la migliore approssimazione per $f(x) = \sin x$ con un polinomio di terzo grado si ottiene calcolando la proiezione di f sul sottospazio $W = \text{span}(1, x, x^2, x^3)$ dei polinomi di terzo grado, che è un sottospazio di dimensione finita dello spazio di Hilbert $L^2(-1, 1)$, e quindi in esso chiuso (vedi esercizio 5.1).

Calcoliamo

$$P_W(f) = \sum_{i=1}^4 (f, e_i) e_i, \quad (5.2)$$

dove gli e_i sono gli elementi di una base ortonormale di W che si può costruire con il procedimento di Gram-Schmidt.

Con il calcolo si ottiene:

- $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$
- $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x;$
- $e_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1);$
- $e_4 = \sqrt{\frac{7}{8}}(5x^3 - 3x).$

Ora dobbiamo determinare i termini della sommatoria (5.2):

- $(f, e_1)e_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sin x \, dx \right] \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ poiché $\sin x$ è dispari;
- $(f, e_2)e_2 = \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 x \sin x \, dx \right] \left(\sqrt{\frac{3}{2}} x \right)$, e integrando per parti si ottiene $(f, e_2)e_2 = 3(\sin 1 - \cos 1)x$;
- $(f, e_3)e_3 = \left[\sqrt{\frac{5}{8}} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \sin x \, dx \right] \left[\sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1) \right] = 0$ poiché la funzione integranda è dispari;
- $(f, e_4)e_4 = \left[\sqrt{\frac{7}{8}} \int_{-1}^1 (5x^3 - 3x) \sin x \, dx \right] \left[\sqrt{\frac{7}{8}} (5x^3 - 3x) \right]$, e integrando per parti si ottiene $(f, e_4) = \frac{7}{2}(14 \cos 1 - 9 \sin 1)(5x^3 - 3x)$.

Mettendo insieme i risultati ottenuti si ricava

$$P_W(f) = (245 \cos 1 - \frac{315}{2} \sin 1)x^3 + \left(\frac{195}{2} \sin 1 - 150 \cos 1 \right) x,$$

che è il polinomio di terzo grado che meglio approssima la funzione $\sin x$. □

Esercizio 5.6. Sia Ω un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$. Definiamo con M lo spazio delle funzioni che appartengono a $L^2(\Omega)$ costanti quasi ovunque. Provare che:

- (1) M è un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega)$;
- (2) per ogni $g(x) \in L^2(\Omega)$ la proiezione di $g(x)$ su M è la media di $g(x)$ su Ω , cioè $P_M(g) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) \, dx$;
- (3) lo spazio ortogonale a M è lo spazio delle funzioni in $L^2(\Omega)$ a media nulla.

Dimostrazione. (1) Osserviamo che M è un sottospazio vettoriale di $L^2(\Omega)$ isomorfo a $\mathbb{R}$, dal momento che è generato dalla funzione costante uguale a 1 quasi ovunque. Si può concludere che M è chiuso in $L^2(\Omega)$ (vedi esercizio 5.1).

(2) Consideriamo adesso $g(x) \in L^2(\Omega)$. Dal teorema della proiezione 5.2 segue che $(g - P_M(g), v) = 0$ per ogni $v \in M$. Sia dunque $v(x)$ una generica funzione in M , $v(x) = c$ quasi ovunque. Vale allora

$$(g - P_M(g), v) = \int_{\Omega} (g(x) - P_M(g))v(x) \, dx = \int_{\Omega} c(g(x) - P_M(g)) \, dx = 0$$

quindi

$$P_M(g) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(x) \, dx$$

dal momento che $P_M(g)$ è un elemento di M e quindi è costante quasi ovunque.

(3) Proviamo infine che

$$M^\perp = \{g(x) \in L^2(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g(x) dx = 0\}.$$

Sia $h \in M^\perp$; allora $(h, g) = 0$ per ogni $g \in M$, cioè

$$\int_\Omega h(x)g(x) dx = 0.$$

Ricordando che $g(x)$ è costante quasi ovunque, segue la tesi. $\square$

Esercizio 5.7. Consideriamo $S = \{f \in L^p(0, 1) : \int_0^1 f^2(x) dx = 1\}$. Calcolare la distanza tra la funzione $f_0(x) = x$ e l'insieme S nella norma di $L^p(0, 1)$ per $p = 2$ e $p = +\infty$.

Dimostrazione. Caso $p = 2$.

Sia $h \in S$; allora $\|h\|_2^2 = 1$. Dal momento che $L^2(0, 1)$ è uno spazio di Hilbert, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \|f_0 - h\|_2^2 &= \|f_0\|_2^2 - 2(f_0, h) + \|h\|_2^2 = \frac{1}{3} - 2(f_0, h) + 1 = \frac{4}{3} - 2(f_0, h) \geq \\ &\geq \frac{4}{3} - 2\|f_0\|_2 = \frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Schwarz.

Per ogni $h \in S$ vale allora

$$\|f_0 - h\|_2 \geq \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.$$

Il minimo è dunque raggiunto per $h = \frac{f_0}{\|f_0\|} \in S$ (l'appartenenza a S si può verificare risolvendo l'integrale $\int_0^1 \frac{f_0^2}{\|f_0\|^2}$). Allora

$$d(f_0, S) = \inf_{h \in S} \|f_0 - h\|_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}.$$

Caso $p = +\infty$. Sia $t_0 > 0$ l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$1 = \frac{1}{3} + t^2 + t;$$

proviamo che

$$d(f_0, S) = t_0.$$

Innanzitutto si dimostra che esiste $\tilde{h} \in S$ tale che $\|f_0 - \tilde{h}\|_\infty = t_0$.

Sia $\tilde{h} = f_0 + t_0 \in L^\infty(0, 1)$, con $g(x) = t_0 \in L^\infty$, $\|g\|_\infty = t_0$. Allora $\tilde{h} \in S$. Infatti, per come è stato scelto il valore t_0 si ha

$$\int_0^1 (f_0 + t_0)^2 dx = \frac{1}{3} + t_0^2 + t_0 = 1,$$

dunque

$$\|f_0 - \tilde{h}\|_\infty = \|t_0\|_\infty = t_0,$$

da cui segue che

$$d(f_0, S) = \inf_{h \in S} \|f_0 - h\|_\infty \leq t_0.$$

Proviamo infine che vale $d(f_0, S) \geq t_0$.

Osserviamo che $h \in S$ la posso sempre esprimere come somma di funzioni di $L^\infty(0, 1)$ scrivendo $h = f_0 + g$, con $g = h - f_0 \in L^\infty(0, 1)$.

Dal momento che $h \in S$ vale

$$1 = \int_0^1 (f_0 + g)^2 dx = \int_0^1 f_0^2 dx + \int_0^1 g^2 dx + \int_0^1 2f_0 g dx \leq \frac{1}{3} + \|g\|_\infty^2 + \|g\|_\infty,$$

e risolvendo la disequazione si ottiene $\|g\|_\infty \geq t_0$, ovvero $\|h - f_0\|_\infty \geq t_0$, per ogni $h \in S$. Passando all'estremo inferiore si ottiene la tesi. $\square$

Esercizio 5.8. Sia V_n il sottoinsieme di $L^2([0, 1])$ così definito

$$V_n = \{\phi(t) \in C^3([0, 1]) : \phi'''(t) + 2\phi'(t) = \frac{t}{n}, t \in [0, 1], \phi(0) = \phi'(0) = 0\}.$$

Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x, V_n)$, con $x(t) = t$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Gli elementi di V_n sono le soluzioni del problema differenziale con condizioni al bordo

$$\begin{cases} \phi'''(t) + 2\phi'(t) = \frac{t}{n}, & x \in [0, 1]; \\ \phi(0) = \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il problema con il calcolo diretto, si ottiene

$$V_n = \{\phi(t) \in L^2([0, 1]) : \phi(t) = \frac{t^2}{4n} + a(1 - \cos \sqrt{2}t), t \in [0, 1], a \in \mathbb{R}\}.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$V = \{\phi(t) \in L^2([0, 1]) : \phi(t) = a(1 - \cos \sqrt{2}t), t \in [0, 1], a \in \mathbb{R}\}$$

delle soluzioni del problema differenziale omogeneo associato, sottospazio vettoriale di $L^2([0, 1])$.

Osserviamo che per $x(t) = t$:

- $\text{dist}(x, V_n) = \text{dist}(x_n, V)$, dove $x_n(t) = t - \frac{t^2}{4n}$;
- V è un sottospazio di $L^2([0, 1])$ di dimensione finita, quindi chiuso (vedi esercizio 5.1). Allora per il teorema della proiezione 5.2: $\text{dist}(x_n, V) = \|x_n - P_V(x_n)\|_2$.

Alla luce di quanto osservato, il limite da calcolare è equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - P_V(x_n)\|_2.$$

Poiché l'operatore proiezione P_V e la norma $\|\cdot\|_2$ sono applicazioni continue, se proviamo che x_n converge a x , allora per continuità $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - P_V(x_n)\|_2 = \|x - P_V(x)\|_2$.

Infatti

$$\|x_n - x\|_2 = \left(\int_0^1 \left| \frac{t^2}{4n} \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4n} \left(\int_0^1 |t^2|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x, V_n) = \|x - P_V(x)\|_2.$$

Dato che vale $\|x - P_V(x)\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \|P_V(x)\|_2^2$ (teorema di Pitagora generalizzato agli spazi di Hilbert), calcoliamo $P_V(x) = (x, e_1)e_1$, dove $\{e_1\}$ è una base ortonormale per V , e

$$e_1(t) = \frac{1 - \cos \sqrt{2}t}{\|1 - \cos \sqrt{2}t\|_2}.$$

Risolvendo gli integrali seguenti

$$\|x\|_2^2 - \|P_V(x)\|_2^2 = \int_0^1 t^2 dt - \frac{\left(\int_0^1 t^2 (1 - \cos \sqrt{2}t)^2 dt \right)}{\int_0^1 (1 - \cos \sqrt{2}t)^2 dt}$$

si ottiene il risultato cercato. □

Esercizio 5.9. *Studiare la convergenza debole negli spazi di Hilbert.*

Dimostrazione. Diamo le proprietà della convergenza debole negli spazi di Hilbert (valgono tutte le proprietà studiate nell'esercizio 4.1).

(1) Dal teorema di rappresentazione di Riesz 5.3, possiamo riformulare la convergenza debole di una successione $(x_n) \subset H$ in questo modo: $x_n \rightharpoonup x$ se e solo se $(y, x_n) \rightarrow (y, x)$ per ogni $y \in H$.

(2) Se (x_n) è una successione tale che per ogni $y \in H$ esiste finito il limite della successione (x_n, y) allora $x_n \rightharpoonup x$. Infatti, posto $F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y)$, si applica il teorema di Banach-Steinhaus 3.2 alla successione di funzionali $F_n(y) = (x_n, y)$, da cui segue che F è un funzionale limitato. Per il teorema di rappresentazione 5.3 esiste $x \in H$ tale che $F(y) = (x, y)$ e la tesi segue dal punto (1).

(3) Se $x_n \rightharpoonup x$ allora (x_n) è limitata in norma. Infatti se (x_n) converge nella topologia debole, per ogni $F \in H^*$ la successione di numeri reali $F(x_n)$ è limitata; segue allora per il corollario 3.3 del teorema di Banach-Steinhaus che (x_n) è limitata in norma.

(4) Se $x_n \rightharpoonup x$ e $y_n \rightarrow y$, allora $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Questo fatto segue direttamente dalla linearità del prodotto scalare e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Infatti

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| = \\ &= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n, y) - (x, y)| \leq \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + |(x_n, y) - (x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

dal momento che $y_n \rightarrow y$ in norma, e $x_n \rightharpoonup x$.

(5) $x_n \rightarrow x$ se e solo se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$. Che la convergenza in norma implichi quella debole l'abbiamo già provato negli spazi normati, per il viceversa basta considerare la seguente relazione

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2(x_n, x) + \|x\|^2$$

e passare al limite per $n \rightarrow +\infty$

(6) Se $x_n \rightharpoonup x$ allora $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \geq \|x\|$. Infatti, per quanto affermato al punto (1), $(x_n, x) \rightarrow (x, x) = \|x\|^2$ e dunque $\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, x)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \|x\| = \|x\| \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$, da cui la tesi.

(7) Ricordiamo infine che, dato uno spazio di Hilbert H , ogni successione li-

mitata in norma ammette un'estratta debolmente convergente ad un elemento di H . $\square$

Esercizio 5.10. Sia H uno spazio di Hilbert ed (e_n) una base hilbertiana di H . Ricordiamo che si dice base hilbertiana una successione di elementi (e_n) di H tali che:

(i) $\|e_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $(e_n, e_m) = 0$ per $m \neq n$;

(ii) lo spazio vettoriale generato dalla successione (e_n) è denso in H .

Allora (e_n) converge debolmente a zero. Sia inoltre (a_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$, tale che $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e si definisca

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Allora:

(1) la successione $\|u_n\|$ converge a 0;

(2) $\sqrt{n}u_n$ converge debolmente a zero.

Dimostrazione. Sia $(x_n) \subset H$ una successione di elementi ortonormali. Per ogni $y \in H$ proviamo che

$$(y, x_n) \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad n \rightarrow \infty.$$

Infatti dalla disuguaglianza di Bessel segue che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(y, x_n)|^2 \leq \|y\|^2,$$

e quindi, poiché la serie a sinistra converge, la successione generante la serie è infinitesima. Ciò vale in particolare per le basi hilbertiane, che dunque convergono debolmente a 0 (vedi punto (1) dell'esercizio 5.9).

(1) Si prova facilmente che $\|u_n\|$ converge a 0. Infatti

$$\|u_n\|^2 = (u_n, u_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \frac{M^2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty.$$

(2) Per dimostrare che $\sqrt{n}u_n$ converge debolmente a zero mostriamo che per ogni $y \in H$

$$(y, \sqrt{n}u_n) \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Poiché (e_n) è base hilbertiana, per ogni $y \in H$ possiamo scrivere

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i) e_i.$$

Allora

$$\begin{aligned} |(y, \sqrt{n}u_n)| &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i) e_i, \sum_{j=1}^n a_j e_j \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i) (e_i, e_j) a_j \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{j=1}^n (y, e_j) a_j \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |(y, e_j)| |a_j| \leq \frac{M}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |(y, e_j)| \leq \\ &\leq \frac{CM}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{j=1}^n |(y, e_j)|^2} \leq \frac{CM}{\sqrt{n}} \|y\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che esiste $C > 0$ tale

$$\sum_{j=1}^n |(y, e_j)| \leq C \sqrt{\sum_{j=1}^n |(y, e_j)|^2}$$

per l'equivalenza delle norme in $\mathbb{R}^N$, e nell'ultimo passaggio si è applicata di nuovo la disuguaglianza di Bessel. $\square$

Esercizio 5.11. Sia H uno spazio di Hilbert e $M \subset H$ un suo sottospazio chiuso. Consideriamo $M^\perp$ il suo ortogonale,

$$M^\perp = \{f \in H : (f, u) = 0 \quad \forall u \in M\}.$$

(1) Provare che $M^\perp$ è un sottospazio chiuso.

(2) Provare che $(M^\perp)^\perp = M$.

(3) Provare che $H = M \oplus M^\perp$.

Dimostrazione. (1) Sia $(x_n) \subset M^\perp$ una successione convergente a x_0 in H . Allora per ogni $y \in M$ risulta

$$(x_0, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y) = 0,$$

ovvero $x_0 \in M^\perp$.

(2) Sia $y \in M$. Allora per ogni $f \in M^\perp$ vale $(f, y) = 0$, ovvero $y \in M^{\perp\perp}$. Viceversa sia $y \in M^{\perp\perp}$; per il teorema della proiezione 5.2 su un sottospazio chiuso vale che $(y - P_M(y), z) = 0$ per ogni $z \in M$, ovvero $y - P_M(y) \in M^\perp$ e quindi $(y - P_M(y), y) = 0$ per la definizione di $M^{\perp\perp}$. Perciò

$$\|y - P_M(y)\|^2 = (y, y - P_M(y)) - (P_M(y), y - P_M(y)) = 0,$$

ovvero $y = P_M(y) \in M$.

(3) Se $y \in H$ lo possiamo scrivere come $y = P_M(y) + (y - P_M(y))$ con $P_M(y) \in M$ e $y - P_M(y) \in M^\perp$, come abbiamo visto al punto (2). Proviamo che questa rappresentazione è univocamente determinata. Supponiamo esistano $u \in M$ e $v \in M^\perp$, con $u \neq P_M(y)$ e $v \neq (y - P_M(y))$ tali che $y = u + v$. Allora

$$P_M(y) - u + (y - P_M(y)) - v = 0,$$

cioè $P_M(y) - u = v - (y - P_M(y)) \in M \cap M^\perp = \{0\}$, da cui segue che deve essere $P_M(y) = u$ e $y - P_M(y) = v$. $\square$

Esercizio 5.12. Sia H uno spazio di Hilbert e F un funzionale lineare e continuo in H^* diverso dal funzionale nullo. Allora la dimensione dello spazio ortogonale al nucleo di F è uguale a 1.

Dimostrazione. Sia M il nucleo del funzionale F ,

$$M = \{x \in H : F(x) = 0\}.$$

M è un sottospazio vettoriale chiuso di H . Sia $M^\perp$ il suo complemento ortogonale definito da

$$M^\perp = \{f \in H : (f, u) = 0, \forall u \in M\}.$$

Essendo F diverso dal funzionale nullo M è un sottospazio proprio di H e $\dim M^\perp > 0$.

Per il teorema di rappresentazione 5.3 esiste $f \in H$ tale che $F(v) = (f, v)$ per ogni $v \in H$; in particolare $f \in M^\perp$ poiché banalmente $(f, u) = 0$ per ogni $u \in M$. Definiamo $g = f - P_M(f)$ dove con $P_M(f)$ si è indicata la proiezione di f sul sottospazio M e osserviamo che per il teorema della proiezione 5.2 $g \in M^\perp$.

Scegliamo un elemento $u \in H$ e cerchiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $u - \lambda g \in M$. D'altra parte $u - \lambda g \in M$ se e solo se $F(u - \lambda g) = 0$ cioè se e solo se $\lambda = \frac{F(u)}{F(g)}$ (questa scrittura ha senso, dal momento che $g \in M^\perp$ e quindi $F(g) \neq 0$).

Quindi H si può scrivere come $M \oplus g\mathbb{R}$. D'altra parte vale anche $H = M \oplus M^\perp$,

da cui $M^\perp = g\mathbb{R}$, poiché $M^\perp$ è uno spazio di dimensione positiva contenuto nella retta $g\mathbb{R}$. Si conclude che $\dim M^\perp = 1$. $\square$

Esercizio 5.13. Sia H uno spazio di Hilbert, e siano F_1 e F_2 funzionali lineari e continui su H non identicamente nulli. Assumiamo che valga la condizione

$$\forall x \in H \text{ tale che } |F_1(x)| = \|F_1\| \cdot \|x\| \Rightarrow F_2(x) = 0.$$

Provare che vale

$$\forall x \in H \text{ tale che } |F_2(x)| = \|F_2\| \cdot \|x\| \Rightarrow F_1(x) = 0.$$

Dimostrazione. Per il teorema di rappresentazione di Riesz 5.3, esistono $y_1, y_2 \in H \setminus \{0\}$ tali che $F_1(x) = (x, y_1)$ e $F_2(x) = (x, y_2)$ per ogni $x \in H$. Possiamo dunque riscrivere l'ipotesi in questo modo:

$$\forall x \in H \text{ tale che } |(x, y_1)| = \|x\| \cdot \|y_1\| \Rightarrow (x, y_2) = 0. \quad (5.3)$$

Sia $x = y_1$. Allora $|(x, y_1)| = |(y_1, y_1)| = \|y_1\|^2 = \|x\| \cdot \|y_1\|$; quindi dalla (5.3) segue che

$$(y_1, y_2) = 0. \quad (5.4)$$

Consideriamo $K = \text{span}(y_1, y_2)$, che è un sottospazio chiuso di H . Allora $H = K \oplus K^\perp$, quindi se $x \in H$ esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $z \in K^\perp$ tali che $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + z$. Supponiamo che valga $|F_2(x)| = \|x\| \cdot \|y_2\|$. Dal momento che $y_1, y_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \|x\| \cdot \|y_2\| &= |F_2(x)| = |(x, y_2)| = |(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + z, y_2)| = \\ &= |\lambda_1 (y_1, y_2) + \lambda_2 (y_2, y_2) + (z, y_2)| = \\ &= \lambda_2 (y_2, y_2) = \lambda_2 \|y_2\|^2, \end{aligned}$$

dove si è usata la (5.4) e il fatto che $z \in K^\perp$. Quindi $\|x\| = \lambda_2 \|y_2\|$, cioè $\|\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + z\| = \|\lambda_2 y_2\|$, da cui segue che $x = \lambda_2 y_2$.

Quindi dalla (5.4) si deduce che $(x, y_1) = 0$, che è quello che volevamo dimostrare, cioè

$$\forall x \in H \text{ tale che } |(x, y_2)| = \|x\| \cdot \|y_2\| \Rightarrow (x, y_1) = 0.$$

$\square$

Esercizio 5.14. Sia H spazio di Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H, H)$ e $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ l'operatore aggiunto di T , cioè $(T(x), y) = (x, T^*(y))$ per ogni $x, y \in H$.

- (1) Dimostrare che se T è compatto allora TT^* è compatto, dove $TT^* = T \circ T^*$.
- (2) Provare che se (x_n) è una successione limitata in H tale che $TT^*(x_n)$ è di Cauchy allora anche $T^*(x_n)$ è di Cauchy.

(3) Dedurre che T^* è compatto.

Si dimostra quindi che $T \in \mathcal{L}(H, H)$ è compatto se e solo se $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ è compatto.

Dimostrazione. (1) Sia $T \in \mathcal{L}(H, H)$, allora anche $T^* \in \mathcal{L}(H, H)$ e vale $\|T^*\|_{\mathcal{L}} = \|T\|_{\mathcal{L}}$. Consideriamo $(x_n) \subset H$ limitata, ovvero $\|x_n\| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Segue che, per ogni n ,

$$\|T^*(x_n)\| \leq \|T^*\|_{\mathcal{L}(H, H)} \|x_n\| \leq M \|T^*\|_{\mathcal{L}(H, H)},$$

dunque anche $T^*(x_n)$ è limitata in H .

Dal momento che T è compatto, $TT^*(x_n)$ ammette una sottosuccessione convergente, ovvero TT^* è compatto.

(2) Utilizzando la definizione di operatore aggiunto e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz otteniamo

$$\|T^*(x)\|^2 = (T^*(x), T^*(x)) = (TT^*(x), x) \leq \|TT^*(x)\| \|x\|. \quad (5.5)$$

Ora, se $TT^*(x_n)$ è di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m > \bar{n}$,

$$\|TT^*(x_n) - TT^*(x_m)\| = \|TT^*(x_n - x_m)\| < \varepsilon.$$

Dalla disuguaglianza (5.5) segue che, per ogni $n, m > \bar{n}$,

$$\|T^*(x_n) - T^*(x_m)\|^2 = \|T^*(x_n - x_m)\|^2 \leq \|TT^*(x_n - x_m)\| \|x_n - x_m\|.$$

Dal momento che (x_n) è limitata per ipotesi, ovvero $\|x_n\| \leq M$ per ogni n , allora

$$\|T^*(x_n) - T^*(x_m)\|^2 \leq M\varepsilon \quad \text{per ogni } n, m > \bar{n},$$

ovvero $T^*(x_n)$ è di Cauchy in H .

(3) Supponiamo che (x_n) sia una successione limitata in H . Dal punto (1) segue che TT^* è compatto, quindi $TT^*(x_n)$ ammette una sottosuccessione $TT^*(x_{n_j})$ convergente, dunque di Cauchy. Ma per il punto (2) segue che anche $T^*(x_{n_j})$ è di Cauchy e, poiché H è completo, $T^*(x_{n_j})$ converge in H . Abbiamo così dimostrato che T^* è compatto. $\square$

Esercizio 5.15. Sia $M : f \in L^2([0, 1]) \longrightarrow Mf \in L^2([0, 1])$ l'operatore definito

da $(Mf)(x) = m(x)f(x)$, per ogni $f \in L^2([0, 1])$, con $x \in [0, 1]$, dove

$$m(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$m(x) \in L^\infty([0, 1])$.

(1) Provare che M è un operatore lineare e continuo, e valutare $\|M\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}$.

(2) Determinare $\ker M$, $(\ker M)^\perp$, e la proiezione $P_{\ker M}(f)$ di f su $\ker M$, con $f \in L^2([0, 1])$, dove

$$\ker M = \{f \in L^2([0, 1]) : (Mf)(x) = 0 \text{ q.o. in } [0, 1]\}.$$

(3) Detta $R(M)$ l'immagine dell'operatore M , stabilire se $R(M)$ è chiuso.

Dimostrazione. (1) È facile verificare che M è lineare. Proviamo che è limitato, e dunque continuo. Per ogni $f \in L^2([0, 1])$

$$\begin{aligned} \|Mf\|_2 &= \left(\int_0^1 (m(x))^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \|m\|_\infty^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|m\|_\infty \|f\|_2 = \frac{1}{2} \|f\|_2, \end{aligned}$$

dunque M è limitato, e vale $\|M\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{1}{2}$.

Proviamo che vale l'uguaglianza $\|M\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \frac{1}{2}$. Per farlo, cerchiamo una successione di funzioni in $L^2([0, 1])$ per cui si abbia $\|f_n\|_2 = 1$ e $\|Mf_n\|_2 \rightarrow \frac{1}{2}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x)$ per $n \geq 2$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 (f_n(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} n dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

e

$$\|Mf_n\|_2 \geq \left(\int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right)^2 n dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

da cui la tesi.

(2) Per definizione $f \in \ker M$ se e solo se $(Mf)(x) = 0$ per quasi ogni $x \in [0, 1]$, ovvero se e solo se $xf(x) = 0$ per quasi ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$, dunque se e solo se $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Allora

$$\ker M = \{f \in L^2([0, 1]) : f = 0 \text{ q.o. in } [0, \frac{1}{2}]\}.$$

Consideriamo ora

$$N = \{f \in L^2([0, 1]) : f = 0 \text{ q.o. in } [\frac{1}{2}, 1]\};$$

$N \subset (\ker M)^\perp$. Proviamo che vale anche l'inclusione inversa.

Sia $f \in (\ker M)^\perp$, allora per ogni $g \in \ker M$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0.$$

Sia ora $E \subset [\frac{1}{2}, 1]$ un sottoinsieme di E misurabile secondo Lebesgue, e χ_E la funzione caratteristica di E ; $\chi_E \in \ker M$, e vale

$$\int_0^1 f(x)\chi_E(x)dx = 0 = \int_E f(x)dx$$

da cui segue che f è quasi ovunque nulla su E , per ogni E così scelto, dunque $f = 0$ quasi ovunque in $[\frac{1}{2}, 1]$, ovvero $f \in N$.

Resta da determinare $P_{\ker M}(f)$ con $f \in L^2([0, 1])$.

Ricordiamo che se M è un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert H , allora

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Dunque $L^2([0, 1])$ si può scrivere come somma diretta di $\ker M$ e $N = (\ker M)^\perp$.

Sia $f \in L^2([0, 1])$, allora

$$f = f\chi_{[\frac{1}{2}, 1]} + f\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \quad (5.6)$$

con $f\chi_{[\frac{1}{2}, 1]} \in \ker M$ e $f\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \in (\ker M)^\perp$. Per il teorema della proiezione 5.2, dal momento che $\ker M$ è un sottospazio chiuso di $L^2([0, 1])$, vale

$$(f - P_{\ker M}(f), v) = 0 \quad \forall v \in \ker M.$$

Dalla (5.6) segue necessariamente che $P_{\ker M}(f) = f\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$, dal momento che la rappresentazione (5.6) è univocamente determinata.

(3) Proviamo che $R(M)$ non è chiuso, mostrando che $\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \in \overline{R(M)}$ ma $\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \notin$

$R(M)$.

Innanzitutto proviamo che $\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \notin R(M)$. Infatti se esistesse $f \in L^2([0, 1])$ tale che $m(x)f(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(x)$ quasi ovunque su $[0, 1]$, allora sarebbe $f(x) = \frac{1}{x}$ per quasi ogni $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Ma

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = +\infty$$

in contraddizione con il fatto che $f \in L^2([0, 1])$.

Troviamo ora una successione di funzioni in $R(M)$ che converga a $\chi_{[0, \frac{1}{2}]}$.

Consideriamo $\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]}$ per $n \geq 2$. Ora, $\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]} \in R(M)$ per ogni $n \geq 2$, poiché definendo $f(x) \in L^2([0, 1])$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, 1]; \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

si ottiene $m(x)f(x) = \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]}(x)$. Verifichiamo la convergenza:

$$\|\chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}]} \|_2 = \left(\int_0^{\frac{1}{n}} 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Si conclude che la chiusura di $R(M)$ non è contenuta in $R(M)$ e quindi $R(M)$ non può essere chiuso. $\square$

Esercizio 5.16. Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matrice simmetrica definita positiva, e $a(u, v)$ la forma bilineare su $\mathbb{R}^N$ definita, per ogni u e $v \in \mathbb{R}^N$, da

$$a(u, v) = v^T A u = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} u_i v_j.$$

Sia $b \in \mathbb{R}^N$; definiamo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (b, u),$$

dove $(b, u) = \sum_{i=1}^N b_i u_i$ è l'usuale prodotto scalare su $\mathbb{R}^N$ indotto dalla norma euclidea $\|\cdot\|_2$.

Dimostrare che esiste una soluzione $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$ per il problema di minimo

$$\min_{u \in \mathbb{R}^N} J(u). \quad (5.7)$$

Dimostrazione. Applichiamo il procedimento dei metodi diretti per dimostrare che il problema (5.7) ammette soluzione. Prima di procedere osserviamo che, poiché la matrice A è simmetrica, la forma bilineare

$$a(u, v) = (u, Av)$$

definisce un nuovo prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$ e una nuova norma

$$\|u\| = \sqrt{(u, Au)}$$

equivalente alla norma euclidea. Inoltre, dato che A è una matrice definita positiva si ha che esiste $\alpha > 0$ tale che

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_2^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^N,$$

dunque a è coerciva.

Vediamo ora come si applica il procedimento dei metodi diretti per risolvere questo problema di minimo:

- mostriamo che $J(u)$ è inferiormente limitato. Applicando le disuguaglianze di Schwarz e di Young,

$$\left| \sum_i b_i u_i \right| \leq \|b\|_2 \|u\|_2 \leq \varepsilon^2 \|u\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|b\|_2^2 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Dunque

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (b, u) \geq \frac{1}{2} \alpha \|u\|_2^2 - \varepsilon^2 \|u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \|b\|_2^2 = \left(\frac{1}{2} \alpha - \varepsilon^2 \right) \|u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \|b\|_2^2.$$

Scegliendo $\varepsilon > 0$ in modo che $\frac{1}{2} \alpha - \varepsilon^2 > 0$, cioè $\varepsilon^2 < \frac{1}{2} \alpha$ si ha

$$J(u) \geq \left(\frac{1}{2} \alpha - \varepsilon^2 \right) \|u\|_2^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} \|b\|_2^2 \geq -\frac{1}{\varepsilon^2} \|b\|_2^2,$$

da cui segue che $J(u)$ è limitato inferiormente da $m = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} J(u) > -\infty$;

- proviamo l'esistenza di una successione minimizzante $(u_n) \subset \mathbb{R}^N$, cioè tale che

$$m = \inf_{u \in \mathbb{R}^N} J(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n)$$

che converge (o ammette una sottosuccessione convergente) rispetto alla norma indotta dalla forma bilineare a .

Sia dunque (u_n) una successione minimizzante. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste

$n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > n_0$ si ha $|J(u_n) - m| < \varepsilon$. Proviamo che u_n è di Cauchy rispetto alla norma generata da $a(u, v)$.

Utilizzando l'identità del parallelogramma si ottiene

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= 2\|u_n\|^2 + 2\|u_m\|^2 - \|u_n + u_m\|^2 = \\ &= 2(u_n, Au_n) + 2(u_m, Au_m) - 4\left(\frac{u_n + u_m}{2}, A\frac{u_n + u_m}{2}\right).\end{aligned}$$

Considerando la definizione del funzionale $J(u)$, per $n, m > n_0$

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= \\ &= 4J(u_n) + 4(b, u_n) + 4J(u_m) + 4(b, u_m) - 8J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) - 8\left(b, \frac{u_n + u_m}{2}\right) = \\ &= 4J(u_n) + 4J(u_m) - 8J\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) < 4m + 4\varepsilon + 4m + 4\varepsilon - 8m = 8\varepsilon,\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che, per ogni $v \in \mathbb{R}^N$, $J(v) \geq m$, e quindi $-J(v) \leq -m$.

Si conclude che u_n è di Cauchy, e dunque u_n converge ad un elemento $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$ rispetto alla norma indotta da $a(u, v)$;

- il funzionale J è ovviamente continuo, dunque vale

$$J(\bar{u}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = m,$$

perciò $\bar{u}$ risolve il problema di minimo (5.7), cioè

$$J(\bar{u}) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Osserviamo inoltre che, poiché $a(u, v)$ è una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica, per il teorema di Lax-Milgram 5.4 $\bar{u}$ è anche tale che

$$a(\bar{u}, v) = (A\bar{u}, v) = (b, v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N,$$

e quindi è soluzione del sistema lineare $Au = b$. □

Capitolo 6

Formulazione variazionale per equazioni differenziali

6.1 Introduzione

Il concetto di derivata debole e l'introduzione degli spazi di Sobolev hanno permesso di affrontare con un approccio diverso lo studio delle equazioni differenziali. Infatti, attraverso la formulazione debole del problema, siamo in grado di stabilire l'esistenza e l'unicità di soluzioni utilizzando i teoremi astratti dell'analisi funzionale, senza fare uso delle tecniche esplicite necessarie per determinare l'espressione delle soluzioni.

Enunciamo di seguito i principali teoremi a cui faremo riferimento.

Data $u \in L^1_{loc}(I)$ diremo che $v \in L^1_{loc}(I)$ è la *derivata debole* di u se

$$\int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b v \varphi dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Ricordiamo ora la definizione di spazio di Sobolev. Sia $1 \leq p \leq +\infty$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Indichiamo con $W^{1,p}(I)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^p(I)$ con derivata debole in $L^p(I)$. $W^{1,p}(I)$ è detto *spazio di Sobolev* sull'insieme I . Negli esercizi che seguono faremo quasi sempre riferimento allo spazio $W^{1,2}(I)$ che è uno spazio di Hilbert.

Teorema 6.1. *Sia $u \in W^{1,p}(I)$, allora esiste una funzione $\tilde{u} \in C^0(I)$ tale che $u(x) = \tilde{u}(x)$ per quasi ogni $x \in I$, e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt.$$

Teorema 6.2. Sia $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < +\infty$, allora esiste una successione u_k in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che la restrizione di u_k a I , che indichiamo con $u_{k|I}$, converge a u in $W^{1,p}(I)$. Segue che, se $I = \mathbb{R}$, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Teorema 6.3 (Immersione). Per ogni $u \in W^{1,p}(I)$ esiste una costante $C > 0$ dipendente dalla misura di I , tale che

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \quad 1 \leq p \leq +\infty.$$

Quindi l'operatore lineare di immersione $u \in W^{1,p}(I) \longrightarrow u \in L^\infty(I)$ è continuo per ogni $1 \leq p \leq +\infty$.

Teorema 6.4 (Ascoli-Arzelà). Sia K un insieme compatto di $\mathbb{R}^N$ e B un sottoinsieme limitato di $C^0(K)$. Se gli elementi di B sono:

- (i) equilimitati, cioè esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$, $x \in K$, per ogni $f \in B$;
- (ii) equicontinui, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $|x - x'| < \delta_\varepsilon$ vale $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ per ogni $f \in B$;

allora B è relativamente compatto in $C^0(K)$.

Teorema 6.5. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$. Allora

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

Lemma 6.6 (Fondamentale del Calcolo delle Variazioni). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto di $\mathbb{R}^N$ e $f \in L^1(\Omega)$ tale che, per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = 0.$$

Allora $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω .

Consideriamo ora lo spazio $W_0^{1,p}(I)$ definito come la chiusura di $C_0^1(I)$ rispetto alla norma di $W^{1,p}$. Se $u \in W^{1,p}(I)$ si ha che $u \in W_0^{1,p}(I)$ se e solo se $u = 0$ sugli estremi dell'intervallo I .

Teorema 6.7 (Disuguaglianza di Poincaré). Sia I un intervallo limitato, allora esiste una costante $C > 0$ dipendente dalla misura di I , tale che per ogni $u \in W_0^{1,p}(I)$ vale

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq C\|u'\|_{L^p}.$$

Osserviamo che la disuguaglianza vale anche se indeboliamo l'ipotesi, ovvero se la funzione si annulla solo in uno dei due estremi dell'intervallo.

Teorema 6.8. Sia u_k una successione in $W^{1,p}(I)$, $1 < p \leq \infty$. Se le norme $\|u'_k\|_p$ sono limitate ed inoltre $|u_k(a)| \leq M$ allora esiste $u \in W^{1,p}(I)$ ed un'estratta di u_k che converge uniformemente ad u .

Teorema 6.9 (delle contrazioni). Sia (X, d) uno spazio metrico completo e $T : X \rightarrow X$ una contrazione, ovvero esiste $0 < \alpha < 1$ tale che, per ogni $x, y \in X$,

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Allora esiste un unico punto fisso per T , cioè esiste unico $\bar{x} \in X$ tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$.

6.2 Esercizi

Esercizio 6.1. Consideriamo la forma bilineare

$$a(u, v) = u(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx,$$

e

$$K = \{v \in W^{1,2}([0, 1]) : v(1) = 0\}.$$

(1) Si provi che per ogni $f \in L^2([0, 1])$ esiste unica soluzione $\bar{u} \in K$ del problema

$$a(u, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in K.$$

(2) Si determini il problema differenziale associato soddisfatto dalla soluzione $\bar{u}$ e le condizioni ai limiti nei punti 1 e 0.

(3) Stabilire le condizioni su f affinché $\bar{u}$ sia soluzione classica.

Dimostrazione. : (1) Si consideri lo spazio di Hilbert K con la norma indotta da $W^{1,2}([0, 1])$. K è un sottospazio di $W^{1,2}([0, 1])$; proviamo che è chiuso. Sia $(v_n) \subset K$ e supponiamo che $v_n \rightarrow v_0$ in $W^{1,2}([0, 1])$; allora $v_n \rightarrow v_0$ in $L^2([0, 1])$, con $v_0 \in W^{1,2}([0, 1])$, e

$$v_n(1) - v_n(0) = \int_0^1 v'_n(x)dx.$$

Dato che $v_n \in K$, $v_n(1) = 0$, per cui esiste $M > 0$ tale che

$$v_n(0) = - \int_0^1 v'_n(x)dx \leq \left| \int_0^1 v'_n(x)dx \right| \leq \int_0^1 |v'_n(x)|dx \leq \|v'_n\|_2 \leq M,$$

poiché v'_n essendo convergente in $L^2([0, 1])$ è limitata. Allora $|v_n(0)| \leq M$.

Per il teorema 6.8 esiste un'estratta $v_{n_k} \rightarrow v_0$. Dal momento che $v_{n_k}(1) = 0$ segue che $v_0(1) = 0$, quindi $v_0 \in V$ ed abbiamo così provato che K è chiuso.

La forma bilineare a su K è simmetrica, continua e coerciva. Infatti

$$a(u, u) = u^2(0) + \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx \geq \int_0^1 (u'^2 + u^2) dx = (u, u)_{1,2} > \alpha \|u\|_{1,2}^2$$

per $\alpha > 0$ e da ciò segue la coercività. Per quanto riguarda la continuità, osserviamo che in base al teorema di immersione 6.3 per gli spazi di Sobolev, risulta

$$|u(0)| \leq \|u\|_\infty \leq C \|u\|_{1,2},$$

dove $C > 0$ è una costante che dipende dall'ampiezza dell'intervallo di definizione dello spazio di Sobolev. Per v vale la stessa relazione, quindi

$$|a(u, v)| \leq |u(0)v(0)| + |(u, v)_{1,2}| \leq (C^2 + 1) \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}.$$

Infine si ricordi che per ogni $f \in L^2([0, 1])$, l'applicazione $F(v) = \int_0^1 f v dx$ è un funzionale lineare e continuo, e quindi un elemento di K^* .

In virtù del teorema di Lax-Milgram 5.4, si ha che esiste un'unica $\bar{u} \in K$ tale che $a(\bar{u}, v) = \int_0^1 f v dx$, per ogni $v \in K$, che è quanto volevamo dimostrare.

(2) Supponiamo che $\bar{u}$ sia regolare e che soddisfi la relazione

$$\bar{u}(0)v(0) + \int_0^1 \bar{u}' v' dx + \int_0^1 \bar{u} v dx = \int_0^1 f v dx \quad \text{per ogni } v \in K. \quad (6.1)$$

Integrando per parti si ottiene

$$\bar{u}(0)v(0) - \int_0^1 \bar{u}'' v dx + [\bar{u}' v]_0^1 + \int_0^1 \bar{u} v dx = \int_0^1 f v dx \quad \text{per ogni } v \in K. \quad (6.2)$$

La (6.2) vale anche se $v \in W_0^{1,2} \subset K$. Dunque si può scrivere

$$\int_0^1 (-\bar{u}''(x) + \bar{u}(x) - f(x)) v(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in W_0^{1,2},$$

e quindi in particolare per ogni $v \in C_0^\infty$. Dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 6.6 segue che

$$-\bar{u}''(x) + \bar{u}(x) - f(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in [0, 1]$. Tenuto conto di questo nella (6.2) risulta

$$\bar{u}(0)v(0) - \bar{u}'(0)v(0) = 0 \quad \text{per ogni } v \in K,$$

e scegliendo in particolare $v \in K$ tale che $v(0) = 1$ si ottiene

$$\bar{u}(0) - \bar{u}'(0) = 0.$$

Si conclude quindi che il problema differenziale associato è

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{in } I = [0, 1]; \\ u(0) - u'(0) = 0; \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

(3) Il precedente problema ammette (6.1) come formulazione variazionale. Abbiamo già dimostrato che esso ammette unica soluzione debole. Si devono ora stabilire le condizioni di regolarità su f in modo che tale soluzione sia anche una soluzione classica. Questo significa capire sotto quali condizioni i passaggi effettuati al punto (2) sono leciti. L'unico passaggio da analizzare è quello effettuato per passare dalla forma (6.1) alla (6.2), poiché gli altri dipendono dal fatto che $\bar{u} \in K$. Vediamo quindi sotto quali ipotesi sia lecito integrare per parti.

Dal momento che $\bar{u} \in W^{1,2}([0, 1])$ è soluzione debole soddisfa (6.1) per ogni $v \in K$, in particolare per ogni $v \in C_0^\infty$ si ha

$$\int_0^1 \bar{u}'(x)v'(x)dx = \int_0^1 (f(x) - \bar{u}(x))v(x)dx.$$

Dalla definizione di derivata debole risulta $(\bar{u}')' = -(f - \bar{u}) \in L^2([0, 1])$, e quindi $\bar{u}' \in W^{1,2}([0, 1])$ da cui segue per il teorema 6.1 che $\bar{u}'$ è continua. Quindi $\bar{u} \in W^{2,2}([0, 1])$ e $\bar{u} \in C^1$. Se si suppone $f \in C^0$ allora $-(f - \bar{u}) \in C^0$, quindi $\bar{u} \in C^2$ e dunque l'integrazione per parti è lecita. Allora sotto l'ipotesi di continuità di f la soluzione debole è anche soluzione classica. $\square$

Esercizio 6.2. Sia I l'intervallo della retta reale $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e definiamo $V = \{v \in W^{1,2}(I) : v(-\frac{1}{2}) = 0\}$. Siano $a(x), b(x)$ due funzioni definite in I , $a(x) \in C^1(I)$ e $b(x) \in C^0(I)$ tali che $\frac{1}{2} \leq a(x), b(x) \leq 1$. Si consideri il problema ai limiti

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u(x) = f(x), & \text{in } I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \\ u(-\frac{1}{2}) = 0; \\ u(\frac{1}{2}) = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

con $f \in L^2(I)$. Si dimostri che esiste una soluzione per il problema e, in particolare,

se $f \in C^0(I)$ allora la soluzione appartiene a $C^2(I)$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che V è un sottospazio vettoriale chiuso in $W^{1,2}(I)$ (si dimostra come nell'esercizio 6.1).

Per dimostrare l'esistenza di una soluzione, si prova che esiste $\bar{u} \in W^{1,2}(I)$ soluzione debole del problema (6.3).

Definiamo la forma bilineare simmetrica

$$A(u, v) = \int_I a(x)u'(x)v'(x) dx + \int_I b(x)u(x)v(x) dx.$$

$A(u, v)$ è continua in V poiché $|A(u, v)| \leq \|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}$, essendo $a(x), b(x) \leq 1$, ed è inoltre coerciva dal momento che $A(u, u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_{1,2}^2$, essendo $a(x), b(x) \geq \frac{1}{2}$.

Consideriamo inoltre il funzionale lineare e continuo sullo spazio vettoriale V definito da

$$F(u) = \int_I f(x)u(x) dx.$$

Allora per il teorema di Lax-Milgram 5.4 esiste, ed in particolare è unico, un elemento $\bar{u} \in V$ per cui si ha $A(\bar{u}, v) = F(v)$ per ogni $v \in V$.

Tale $\bar{u}$ è soluzione debole del problema. Infatti integrando per parti la relazione $A(\bar{u}, v) = F(v)$, si ottiene

$$\left[(a(x)\bar{u}'(x))v(x) \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_I \left((a(x)\bar{u}'(x))'v(x) + b(x)\bar{u}(x)v(x) \right) dx = \int_I f(x)v(x) dx,$$

da cui segue

$$\left(a\left(\frac{1}{2}\right)\bar{u}'\left(\frac{1}{2}\right) \right) v\left(\frac{1}{2}\right) - \int_I (a\bar{u}')'v dx + \int_I b\bar{u}v dx = \int_I f v dx. \quad (6.4)$$

Scegliendo in particolare $v \in W_0^{1,2}(I)$ segue che $\bar{u}$ è soluzione debole dell'equazione

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u(x) = f(x),$$

ed in particolare soddisfa le condizioni al bordo $\bar{u}(-\frac{1}{2}) = 0$ in quanto appartiene a V , e $\bar{u}'(\frac{1}{2}) = 0$. Infatti, dal momento che la (6.4) vale per ogni $v \in W_0^{1,2}(I)$, applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 6.6, si ottiene $a(\frac{1}{2})\bar{u}'(\frac{1}{2})v(\frac{1}{2}) = 0$ per ogni $v \in V$, e dunque $\bar{u}'(\frac{1}{2}) = 0$.

Proviamo ora che la soluzione debole $\bar{u}$ appartiene a $W^{2,2}(I)$. La funzione $\bar{u}$ è

un elemento di V , e per ogni altro elemento $v \in V$ vale

$$\int_I a(x)\bar{u}'(x)v'(x) dx + \int_I b(x)\bar{u}(x)v(x) dx = \int_I f(x)v(x) dx$$

o equivalentemente

$$\int_I a(x)\bar{u}'(x)v'(x) dx = - \int_I (b(x)\bar{u}(x) - f(x))v(x) dx.$$

Dato che questa relazione vale per tutti gli elementi di V , è vera in particolare per le funzioni $v \in C_0^1(I)$, dunque la derivata debole della funzione $a(x)\bar{u}'(x)$ esiste ed è $(a(x)\bar{u}'(x))' = b(x)\bar{u}(x) - f(x)$.

Osserviamo che sia $a\bar{u}'$ che la derivata debole appartengono a $L^2(I)$. Dal momento che $a(x)$ non è mai nulla, $\bar{u}'(x) = \frac{1}{a(x)}(a(x)\bar{u}'(x))$ e quindi anche $\bar{u}' \in W^{1,2}(I)$, per cui $\bar{u} \in W^{2,2}(I)$.

Vediamo adesso che se $f(x) \in C^0(I)$ la soluzione debole $\bar{u}$ così trovata è anche soluzione forte. Infatti per $x \in I$ si ha $(a(x)\bar{u}'(x))' = b(x)\bar{u}(x) - f(x)$ e sotto queste ipotesi $b\bar{u} - f$ è una funzione continua, da cui segue che $a\bar{u}'(x) \in C^1(I)$. Ricordando che $a(x)$ non è mai nulla, si può concludere anche che $\bar{u}' \in C^1(I)$, e quindi $\bar{u} \in C^2(I)$. Ora sia $\phi(x)$ una funzione in $C_0^\infty(I)$, e si consideri

$$\int_I (a(x)\bar{u}'(x)\phi'(x) + b(x)\bar{u}(x)\phi(x)) dx = \int_I f(x)\phi(x) dx.$$

Integrando per parti si ottiene che

$$- \int_I ((a(x)\bar{u}'(x))' - b(x)\bar{u}(x) + f(x))\phi(x) dx = 0$$

e applicando il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 6.6 si ricava che $-(a(x)\bar{u}'(x))' + b(x)\bar{u}(x) = f(x)$ quasi ovunque in I e per continuità, per ogni $x \in I$. $\bar{u}$ è allora anche soluzione classica. □

Esercizio 6.3. Dati $k \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$ si consideri il problema:

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & \text{in } I = [0, 1]; \\ u'(0) = ku(0); \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

(1) Si scriva la formulazione debole del problema (6.5) nello spazio $W^{1,2}(I)$.

(2) Si provi che se $k \geq 0$ allora esiste unica soluzione debole di (6.5) per ogni $f \in L^2(I)$ e che inoltre u è soluzione classica se $f \in C^0(I)$.

(3) Si provi che nel caso $k < 0$ la soluzione debole esiste per ogni $f \in L^2(I)$ se k è sufficientemente “piccolo”.

Dimostrazione. (1) Moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per $\varphi \in C^1(I)$ tale che $\varphi(1) = 0$ ed integriamo per parti

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I (u''\varphi - u\varphi + f\varphi)dx = [u'\varphi]_0^1 - \int_I (u'\varphi' + u\varphi - f\varphi)dx = \\ &= u'(1)\varphi(1) - u'(0)\varphi(0) - \int_I (u'\varphi' + u\varphi - f\varphi)dx. \end{aligned}$$

Per le condizioni al bordo si ottiene

$$\int_I (u'\varphi' + u\varphi - f\varphi)dx + ku(0)\varphi(0) = 0,$$

per ogni $\varphi \in C^1(I)$ tale che $\varphi(1) = 0$. Tale ragionamento ha senso anche per funzioni appartenenti al sottospazio chiuso

$$W = \{\varphi \in W^{1,2}(I) : \varphi(1) = 0\}.$$

Possiamo allora definire soluzione debole del problema una funzione $u \in W$ tale che:

$$\int_I u'\varphi'dx + \int_I u\varphi dx + ku(0)\varphi(0) = \int_I f\varphi dx, \quad \forall \varphi \in W.$$

(2) Consideriamo la forma bilineare

$$a(u, \varphi) = \int_I u'\varphi'dx + \int_I u\varphi dx + ku(0)\varphi(0)$$

definita sullo spazio W dotato della norma $\|\cdot\|_{1,2}$; a è una forma bilineare simmetrica. Mostriamo che è anche coerciva e continua. Infatti, supponendo $k \geq 0$,

$$a(u, u) = \int_I ((u')^2 + u^2)dx + ku^2(0) \geq \int_I ((u')^2 + u^2)dx = \|u\|_{1,2}^2,$$

da cui segue la coercività.

Inoltre, per il teorema di immersione 6.3 negli spazi di Sobolev, esiste una costante

$A > 0$ dipendente solo dall'ampiezza di I , tale che

$$|u(0)| \leq \|u\|_\infty \leq A\|u\|_{1,2} \quad \forall u \in W^{1,2}(I). \quad (6.6)$$

Applicando la disuguaglianza (6.6) e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$|a(u, \varphi)| \leq k|u(0)\varphi(0)| + |(u, \varphi)_{1,2}| \leq (kA^2 + 1)\|u\|_{1,2}\|\varphi\|_{1,2},$$

e quindi a è una forma bilineare continua, coerciva e simmetrica. L'applicazione

$$u \in W \longrightarrow \int_I f u \, dx \in \mathbb{R}$$

è un funzionale lineare e continuo su W per ogni $f \in L^2$. Per il teorema di Lax-Milgram 5.4 si può allora concludere che per ogni $f \in L^2(I)$ esiste unica $u \in W$ tale che per ogni $\varphi \in W$ si abbia

$$\int_I u' \varphi' \, dx + \int_I u \varphi \, dx + ku(0)\varphi(0) = \int_I f \varphi \, dx.$$

Si stabilisce quindi l'esistenza ed unicità della soluzione debole.

Discutiamo ora il ritorno alla soluzione classica. Supponiamo che la soluzione debole u sia sufficientemente regolare e mostriamo i passaggi che riconducono alla soluzione classica. Discuteremo poi sotto quali ipotesi tali passaggi sono leciti. Se u è soluzione debole allora, integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I u' \varphi' \, dx + \int_I u \varphi \, dx + ku(0)\varphi(0) - \int_I f \varphi \, dx = \\ &= u'(1)\varphi(1) - u'(0)\varphi(0) + \int_I (-u'' + u - f)\varphi \, dx + ku(0)\varphi(0), \end{aligned}$$

e quindi

$$[ku(0) - u'(0)]\varphi(0) + \int_I (-u'' + u - f)\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in W. \quad (6.7)$$

Se in particolare $\varphi \in C_0^\infty(I)$, allora

$$\int_I (-u'' + u - f)\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$

e quindi dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 6.6 discende che

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \text{q.o. in } I. \quad (6.8)$$

Per quanto riguarda le condizioni ai limiti u soddisfa $u(1) = 0$ dal momento che $u \in W$. La seconda condizione si ottiene tenendo conto, nella relazione (6.7), di quanto ottenuto in (6.8). Infatti

$$[ku(0) - u'(0)]\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in W,$$

che vale in particolare per le $\varphi \in W$ tali che $\varphi(0) = 1$, da cui

$$ku(0) = u'(0).$$

Tutti questi passaggi dipendono dalle proprietà di soluzione debole, tranne il passaggio iniziale di integrazione per parti per effettuare il quale occorre una certa regolarità per la u . Per concludere basta allora dimostrare che per ogni $f \in C^0(I)$ la soluzione debole è di classe C^2 . Ora se $u \in W$ è soluzione debole allora

$$\int_I u' \varphi' dx = \int_I (f - u) \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Dalla definizione di derivata debole si ha che $u'' = -(f - u) \in L^2(I)$; allora $u' \in W^{1,2}(I)$, quindi $u \in W^{2,2}(I)$, e dunque ammette un rappresentante C^1 . Se inoltre f è continua allora anche u'' lo è e si conclude che $u \in C^2$.

(3) Gli unici passaggi, fra quelli del precedente ragionamento, in cui si è utilizzata l'ipotesi $k \geq 0$ sono quelli fatti per dimostrare la coercività e la continuità della forma bilineare a . Dal fatto che per u vale la disuguaglianza

$$|u(0)| \leq \|u\|_\infty \leq A\|u\|_{1,2},$$

se $k < 0$ allora

$$ku^2(0) \geq kA^2\|u\|_{1,2}^2$$

e quindi

$$a(u, u) = \|u\|_{1,2}^2 + ku^2(0) \geq (1 + kA^2)\|u\|_{1,2}^2.$$

La forma bilineare è ancora coerciva per $k > -\frac{1}{A^2}$. La continuità si recupera ovviamente sostituendo a k il suo modulo $|k|$. Quindi se $k \in (-\frac{1}{A^2}, 0)$ esiste unica soluzione debole e vale quanto dimostrato al punto (2). $\square$

Esercizio 6.4. Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ studiare il problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{in } \mathbb{R}; \\ u(x) \rightarrow 0, & \text{se } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Dimostrazione. Cerchiamo la formulazione debole del problema. In generale si

prova che se u è soluzione classica e quindi C^2 , allora è soluzione debole nel senso che soddisfa una certa condizione integrale (che troveremo in seguito) ed inoltre che appartiene allo spazio in cui questa condizione è definita. In questo caso lo spazio in questione è $W^{1,2}(\mathbb{R})$, che tiene conto della condizione al limite in virtù del teorema 6.5.

Osserviamo che se I è un intervallo limitato allora $C^2(I) \subset W^{1,2}(I)$, e dunque se u è soluzione classica è anche soluzione debole.

Nel caso di insiemi illimitati questo in generale non è vero, quindi iniziamo col provare che se u è soluzione classica allora $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Nel seguito, se non diversamente indicato, si intenderanno gli integrali e gli spazi funzionali definiti rispetto a $\mathbb{R}$.

Sia allora $\phi \in C_0^\infty$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$ e

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Si definisca allora $\phi_n(x) = \phi(\frac{x}{n})$. Ovviamente se $f \in L^p$ ($p \neq \infty$) si ha che $f\phi_n \rightarrow f$ in L^p . Se u è soluzione classica allora $\phi_n u \in C_0^2$ e moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $\phi_n u$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int f(\phi_n u) dx &= \int -u''(\phi_n u) dx + \int u(\phi_n u) dx = \\ &= [-u'(\phi_n u)]_{\mathbb{R}} + \int (\phi_n' u + \phi_n u') u' dx + \int \phi_n u^2 dx. \end{aligned}$$

Dunque

$$\int \phi_n (u^2 + (u')^2) dx = \int \phi_n u f dx - \int \phi_n' u' u dx.$$

Ora

$$- \int \phi_n' u' u dx = [-u^2 \phi_n']_{\mathbb{R}} + \int u^2 \phi_n'' dx + \int u \phi_n' u' dx,$$

da cui segue

$$-2 \int \phi_n' u' u dx = \int u^2 \phi_n'' dx,$$

che implica

$$\int \phi_n (u^2 + (u')^2) dx = \int \phi_n u f dx + \frac{1}{2} \int \phi_n'' u^2 dx. \quad (6.9)$$

Inoltre tenendo conto del fatto che $u(x) \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow +\infty$ e che $\phi_n''(x) = \frac{1}{n^2} \phi''(\frac{x}{n})$

si ha

$$\frac{1}{2} \int \phi_n'' u^2 dx = \frac{1}{2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} \phi_n'' u^2 dx \leq \frac{\|\phi''\|_\infty}{2n^2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} u^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Infine per la disuguaglianza di Young

$$\int \phi_n u f dx \leq \frac{1}{2} \int \phi_n u^2 dx + \frac{1}{2} \int \phi_n f^2 dx.$$

Quindi dalla (6.9) si ottiene che

$$\int \phi_n (u^2 + (u')^2) dx \leq \frac{1}{2} \int \phi_n u^2 dx + \frac{1}{2} \int \phi_n f^2 dx + \frac{\|\phi''\|_\infty}{2n^2} \int_{n \leq |x| \leq 2n} u^2 dx,$$

e portando a primo membro il primo addendo del secondo membro e passando al limite (si osservi che si possono scambiare limite e integrale perché le successioni sono crescenti) si ottiene

$$\int \left(\frac{u^2}{2} + u'^2 \right) dx \leq \frac{\|f\|_2^2}{2},$$

da cui la tesi, ovvero $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda la formulazione debole moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per $v \in C_0^1(\mathbb{R})$ ed integrando per parti si ottiene

$$\int u' v' dx + \int u v dx - \int f v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^1(\mathbb{R}).$$

Dai risultati di densità per gli spazi di Sobolev (teorema 6.2) la relazione precedente vale anche per ogni $v \in W^{1,2}(\mathbb{R})$. Si noti che per lo stesso passaggio nell'esercizio 6.3 si è utilizzata la generalizzazione della regola d'integrazione per parti agli spazi di Sobolev perché l'insieme era limitato.

Diremo allora che u è soluzione debole del problema iniziale se:

- $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$;
- $\int u' v' dx + \int u v dx = \int f v dx \quad \forall v \in W^{1,2}.$

A questo punto i dettagli per l'esistenza e unicità della soluzione debole e per le condizioni di regolarità per il ritorno alla soluzione classica sono esattamente gli stessi dell'esercizio 6.3. $\square$

Esercizio 6.5. Sia $I = (0, 1)$ e si definisca il seguente funzionale

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_I (3x + 1)(v')^2 dx - \int_I (12x - 1)v dx, \quad \text{con } v \in W_0^{1,2}(I).$$

Si determini la soluzione del seguente problema di minimo

$$\min_{v \in W_0^{1,2}(I)} J(v)$$

Dimostrazione. Consideriamo il funzionale: $f : W_0^{1,2}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$, definito da

$$f(v) = \int_I (12x - 1)v dx.$$

f è lineare e continuo, infatti dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$|f(v)| \leq \int_I |12x - 1||v| dx \leq \|12x - 1\|_2 \|v\|_2 \leq C \|v\|_{1,2}, \quad \text{con } C > 0.$$

Si definisca inoltre la forma bilineare $a : W_0^{1,2} \times W_0^{1,2} \longrightarrow \mathbb{R}$, come

$$a(u, v) = \int_I (3x + 1)u'v' dx.$$

Allora a è simmetrica ed è continua poiché

$$|a(u, v)| \leq \|3x + 1\|_\infty \int_I |u'| |v'| dx \leq C \|u'\|_2 \|v'\|_2 \leq C \|u\|_{1,2} \|v\|_{1,2}.$$

Inoltre è coerciva, poiché

$$a(u, u) = \int_I (3x + 1)(u')^2 dx \geq \int_I (u')^2 dx \geq C \|u\|_{1,2}^2,$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la disuguaglianza di Poincaré 6.7.

Per il teorema di Lax-Milgram 5.4 esiste unica $u \in W_0^{1,2}(I)$ tale che

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I).$$

Dal momento che a è simmetrica, si può applicare il principio di Dirichlet astratto (teorema 5.4) e concludere che $u \in W_0^{1,2}(I)$ risolve il problema di minimo

$$\min_{v \in W_0^{1,2}(I)} \left[\frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right],$$

ovvero realizza il minimo per il funzionale $J(v)$. Inoltre u soddisfa

$$a(u, v) - f(v) = 0 \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I), \quad (6.10)$$

quindi integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_I (3x+1)u'v' dx - \int_I (12x-1)v dx = \\ &= [(3x+1)u'v]_0^1 - \int_I [(3x+1)u'' + 3u' + (12x-1)]v dx. \end{aligned}$$

Dal momento che $v \in W_0^{1,2}(I)$ segue che

$$\int_I [(3x+1)u'' + 3u' + (12x-1)]v dx = 0$$

per ogni $v \in W_0^{1,2}(I)$, e quindi in particolare per ogni $v \in C_0^\infty(I)$. Dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni 6.6 segue che

$$(3x+1)u'' + 3u' + 12x - 1 = 0.$$

Allora il minimo cercato non è altro che la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} (3x+1)u'' + 3u' + 12x - 1 = 0, & \text{in } (0, 1); \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.11)$$

Si vede che il problema in questione si può scrivere in forma di problema di Sturm-Liouville nel seguente modo

$$\begin{cases} -[(3x+1)u']' = 12x - 1, & \text{in } (0, 1); \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Inoltre è facile verificare che la (6.10) è la formulazione debole del problema (6.12) e che sono verificate le ipotesi di regolarità affinché si possa ritornare dalla soluzione debole alla soluzione classica e dunque i passaggi fatti sopra sono leciti. Per trovare il minimo cercato basta allora risolvere il problema (6.11). Sostituendo $u' = z$ e integrando si ottiene

$$(3x+1)z + K = -6x^2 + x,$$

e quindi

$$z(x) = \frac{K}{3x+1} - \frac{6x^2 - x}{3x+1},$$

che si può riscrivere come

$$z = \frac{\overline{K}}{3x+1} - 2x + 1.$$

Risostituendo u e integrando si ottiene

$$u(x) = C_1 \ln(3x+1) - x^2 + x + C_2.$$

Imponendo allora le condizioni al bordo si ottiene la soluzione cercata

$$u(x) = -x^2 + x.$$

□

Esercizio 6.6. Sia I l'intervallo della retta reale $I = [0, 1]$ e definiamo V lo spazio delle funzioni $u(x) \in W^{1,2}(I)$ tali che $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$. Si consideri la successione di funzionali $J_n(u)$ definiti su V come segue

$$J_n(u) = \int_0^1 \left(a_n(x) u'^2(x) + 2f(x)u(x) \right) dx$$

dove $f(x) \in L^2(I)$ e $a_n(x) = a(nx)$ con $a(x) = 1 + \{x\}$ e $\{x\}$ indica la parte frazionaria di x . Si consideri il problema

$$\min_{u \in V} J_n(u).$$

Supponendo che $f(x) = 1$ provare che valgono le affermazioni seguenti:

- (1) per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato esiste una soluzione $u_n(x)$ al problema di minimo;
- (2) la successione $u_n(x)$ ammette limite uniforme $\bar{u}$;
- (3) la funzione $\bar{u}$ non risolve il problema di minimo per

$$\bar{J}(u) = \int_0^1 \bar{a}(x) u'^2(x) + 2f(x)u(x) dx.$$

dove $\bar{a}$ rappresenta il limite debole di a_n .

Dimostrazione. (1) Osserviamo che lo spazio V è un sottospazio vettoriale chiuso di $W^{1,2}(I)$. Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e definiamo la forma bilineare simmetrica e continua su V

$$A_n(u, v) = \int_0^1 2a_n(x) u'(x) v'(x) dx.$$

Supponiamo $f(x) = 1$, allora

$$F(v) = - \int_0^1 2f(x)v(x) dx = - \int_0^1 2v(x) dx$$

è un funzionale lineare e continuo su V . Per il teorema di Lax-Milgram 5.4 esiste, ed in particolare è unico, un elemento $\bar{u}_n$ di V per cui valga $A_n(\bar{u}_n, v) = F(v)$ per ogni $v \in V$ e in particolare $\bar{u}_n$ è minimo per il funzionale $\frac{1}{2}A_n(\bar{u}_n, \bar{u}_n) - F(\bar{u}_n)$. Quindi $\bar{u}_n$ realizza il minimo per

$$\frac{1}{2} \int_0^1 2a_n(x)u_n'^2(x) dx + 2 \int_0^1 u(x) dx,$$

ovvero è minimo per il funzionale $J_n(u)$ in V .

Osserviamo inoltre che $\frac{1}{2}A_n(u, u) - F(u)$ con $u \in V$ è la formulazione debole del problema

$$\begin{cases} -(a_n(x)u_n'(x))' = 2f(x), & \text{in } I = [0, 1]; \\ u_n(0) = 0; \\ u_n(1) = 1. \end{cases} \quad (6.13)$$

Per risolvere il problema di minimo basta allora risolvere il problema ai limiti (6.13).

Da $-(a_n u_n')' = 2f = 2$ segue che $a_n u_n' = -2x + c_n$, da cui integrando

$$u_n(x) = \int_0^x \frac{-2t + c_n}{a_n(t)} dt.$$

Andando a sostituire l'espressione di a_n e portando avanti i calcoli risulta quindi

$$u_n(x) = \int_0^x \frac{-2t + c_n}{1 + \{nt\}} dt = \int_0^x \frac{-2t}{1 + \{nt\}} dt + \int_0^x \frac{c_n}{1 + \{nt\}} dt.$$

Facendo il cambiamento di variabili $nt = s$ e ricordando che $\{x\} = x - [x]$ segue che

$$u_n(x) = \int_0^{nx} \frac{1}{n^2} \frac{-2s}{1 + \{s\}} ds + \int_0^{nx} \frac{1}{n} \frac{c_n}{1 + \{s\}} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{[nx]-1} \int_k^{k+1} \frac{s}{1+\{s\}} ds + \int_{[nx]}^{nx} \frac{s}{1+\{s\}} ds \right) + \\
&+ \frac{c_n}{n} \left(\sum_{k=0}^{[nx]-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{1+\{s\}} ds + \int_{[nx]}^{nx} \frac{1}{1+\{s\}} ds \right) = \\
&= -\frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{[nx]-1} \int_k^{k+1} \frac{s}{1+s-k} ds + \int_{[nx]}^{nx} \frac{s}{1+s-[nx]} ds \right) + \\
&+ \frac{c_n}{n} \left(\sum_{k=0}^{[nx]-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{1+s-k} ds + \int_{[nx]}^{nx} \frac{1}{1+s-[nx]} ds \right);
\end{aligned}$$

Calcolando infine gli integrali si ottiene

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= \\
&= -\frac{2}{n^2} \left(\sum_{k=0}^{[nx]-1} (1 + (k-1)\ln(2)) + (nx - [nx]) + ([nx] - 1) \ln(1 + nx - [nx]) \right) + \\
&+ \frac{c_n}{n} ([nx] \ln(2) + \ln(1 + nx - [nx])) = \\
&= -\frac{2}{n^2} \left(\ln(2) \frac{[nx]([nx] - 1)}{2} - [nx] \ln(2) + nx + ([nx] - 1) \ln(1 + nx - [nx]) \right) + \\
&+ \frac{c_n}{n} ([nx] \ln(2) + \ln(1 + nx - [nx])).
\end{aligned}$$

Restano da determinare le costanti c_n . Ricordando che per ogni n vale la condizione $u_n(1) = 1$ si ottiene quindi

$$c_n = \frac{1}{\ln(2)} \left(1 + \ln(2) - \frac{2\ln(2)}{n} + \frac{1}{n} \right),$$

da cui segue facilmente che il limite della successione c_n per $n \rightarrow +\infty$ è

$$\bar{c} = \frac{1}{\ln(2)}(1 + \ln(2)).$$

(2) Consideriamo la successione $u_n(x)$ e cerchiamo il suo limite per n che tende all'infinito.

Ricordiamo che $\left| \frac{[nx]}{n} - x \right| \leq \frac{1}{n}$, quindi la successione $\frac{[nx]}{n}$ converge uniformemente alla funzione x ed inoltre $\frac{[nx]}{n}$ è una successione limitata, quindi anche $\left(\frac{[nx]}{n} \right)^2$ converge uniformemente e il suo limite è la funzione x^2 .

Allora la successione $u_n(x)$ ammette limite uniforme $\bar{u}(x) = \ln(2)x^2 + \bar{c}x \ln(2)$.

(3) Si consideri infine il limite di $J_n(u)$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\bar{J}(u) = \int_0^1 (\bar{a}u'^2(x) + 2u(x)) \, dx$$

dove $\bar{a}(x)$ è il limite debole di $a_n(x)$ che per il teorema di Riemann-Lebesgue 4.6 vale

$$\bar{a}(x) = \int_0^1 a(x) \, dx = \int_0^1 (1 + \{x\}) \, dx = \frac{3}{2},$$

quindi

$$\bar{J}(u) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}u'^2(x) + 2u(x) \right) \, dx.$$

Allora $\bar{u}$ non può essere soluzione del problema di minimo per $\bar{J}$ poiché una soluzione w del problema $\min_{u \in V} \bar{J}(u)$ risolve l'equazione $-\frac{3}{2}w'' = 2$, mentre $\bar{u}$ risolve $\frac{1}{\ln(2)}u'' = 2$.

È interessante osservare che il limite delle soluzioni u_n soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{1}{\ln(2)}\bar{u}'' = 2$$

dove il coefficiente $\frac{1}{\ln(2)}$ è il reciproco del limite debole della successione di funzioni $\frac{1}{a_n(x)}$; infatti sempre per il teorema di Riemann-Lebesgue 4.6 è

$$\int_0^1 \frac{1}{a(x)} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \{x\}} \, dx = \ln(2).$$

□

Esercizio 6.7. (1) Stimare la norma dell'applicazione $F : u \in L^2(I) \longrightarrow Fu \in L^2(I)$, con $I = [a, b]$ definita da

$$(Fu)(x) = \int_a^b \sin(xy)u(y)dy$$

per ogni $u \in L^2(I)$ e $x \in I$.

(2) Stimare la norma dell'operatore $T : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ che ad ogni $f \in L^2(I)$ associa la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \text{in } I = (a, b); \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

(3) Provare che se $b - a$ è sufficientemente piccolo allora esiste una e una sola $u \in C^\infty(I)$ soluzione (classica) del problema

$$\begin{cases} -u''(x) = F(u(x)), & \text{in } I = (a, b); \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Dimostrazione. (1) Per la disuguaglianza di Jensen e altre evidenti maggiorazioni, si ha che per ogni $u \in L^2(I)$

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_2^2 &= \int_a^b \left(\int_a^b \sin(xy) u(y) dy \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_a^b (b-a)^2 \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \sin^2(xy) u^2(y) dy \right) dx \leq \\ &\leq \int_a^b (b-a) \left(\int_a^b u^2(y) dy \right) dx = (b-a)^2 \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$\|F\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|F(u)\|_2}{\|u\|_2} \leq \sup_{u \neq 0} \frac{(b-a)\|u\|_2}{\|u\|_2} = b-a.$$

(2) Applicando il teorema di Lax-Milgram 5.4 sappiamo che per ogni $f \in L^2(I)$ esiste una ed una sola soluzione debole di (6.14), ovvero una ed una sola $\bar{u} \in W_0^{1,2}(I)$ tale che per ogni altra $v \in W_0^{1,2}(I)$

$$\int_a^b \bar{u}' v' dx = \int_a^b f v dx.$$

In particolare

$$\int_a^b \bar{u}' \bar{u}' dx = \int_a^b f \bar{u} dx,$$

e quindi, per la disuguaglianza di Hölder

$$\|\bar{u}'\|_2^2 = \int_a^b f \bar{u} \, dx \leq \|\bar{u}\|_2 \|f\|_2.$$

Ricordiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ e $a, b \in \mathbb{R}$ risulta $ab = (\sqrt{2\varepsilon}a) \left(\frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$.
Dunque

$$\|\bar{u}'\|_2^2 \leq \varepsilon \|\bar{u}\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_2^2.$$

Per la disuguaglianza di Poincaré 6.7 esiste $C > 0$ tale che

$$\|\bar{u}\|_2^2 \leq C^2 \|\bar{u}'\|_2^2 \quad (6.16)$$

e quindi, dalla precedente disuguaglianza si ottiene

$$\|\bar{u}'\|_2^2 (1 - C^2 \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon} \|f\|_2^2.$$

Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $(1 - C^2 \varepsilon) > 0$, ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2C^2}$. In questo caso otteniamo

$$\|\bar{u}'\|_2^2 \leq C^2 \|f\|_2^2, \quad (6.17)$$

e quindi, applicando le disuguaglianze (6.16) e (6.17) e sfruttando la definizione dell'operatore T si ottiene

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_2}{\|f\|_2} \leq \sup_{f \neq 0} \frac{C^2 \|f\|_2}{\|f\|_2} = C^2,$$

dove C è la costante di Poincaré.

(3) Consideriamo l'operatore lineare

$$G : u \in L^2(I) \longrightarrow T(F(u)) \in L^2(I)$$

Proviamo che se $b - a$ è sufficientemente piccolo, G è una contrazione.

Infatti, sfruttando anche quanto mostrato nei punti precedenti, per ogni $u_1, u_2 \in L^2(I)$

$$\begin{aligned} \|G(u_1) - G(u_2)\| &= \|G(u_1 - u_2)\| = \|T(F(u_1) - F(u_2))\| \leq \|T\| \|F(u_1) - F(u_2)\| \leq \\ &\leq C^2 \|F\| \|u_1 - u_2\| \leq C^2 (b - a) \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

È evidente che se $b - a$ è sufficientemente piccolo allora $0 < C^2(b - a) < 1$. Dunque, per il teorema delle contrazioni 6.9, esiste unico punto fisso per G , cioè esiste una

ed una sola $u \in L^2(I)$ tale che $u = T(F(u))$, ovvero u è soluzione debole di (6.14) con $f(x) = F(u(x))$ per ogni $x \in I$.

Quindi

$$\int_a^b u'v' dx = \int_a^b F(u)v dx$$

per ogni $v \in W_0^{1,2}(I)$ ed in particolare per ogni $v \in C_0^\infty(I)$.

Quindi $-F(u) \in L^2(I)$ è la derivata debole di u' , ed in particolare vale

$$u''(x) = -F(u) = -\int_a^b \sin(xy)u(y)dy. \quad (6.18)$$

Dal momento che se $u \in W_0^{1,2}(I)$ allora $u \in C^0(I)$, la (6.18) ci dice che $u'' \in C^0(I)$. Proseguendo con il ragionamento si ottiene che

$$u'''(x) = -\int_a^b y \cos(xy)u(y) dy$$

è continua in I e così via. Segue che $u \in C^\infty(I)$ è una soluzione classica del problema (6.15). $\square$

Esercizio 6.8. Sia $I = [a, b]$. Fissato $a \leq x \leq b$, si consideri la funzione $g : I \times I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(y-a)(b-x)}{b-a}, & a \leq y \leq x; \\ \frac{(x-a)(b-y)}{b-a}, & x \leq y \leq b. \end{cases}$$

(1) Per ogni $f \in L^2(I)$ si definisca $u = T(f)$ ponendo

$$u(x) = \int_a^b g(x, y)f(y)dy.$$

Si provi che $T : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ è lineare, continuo e si stimi il valore di $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}$. Si provi che $T : L^2(I) \longrightarrow W^{1,2}(I)$ è lineare, continuo e si stimi $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, W^{1,2})}$.

(2) Si provi che, per ogni $f \in L^2(I)$, la funzione $u = T(f)$ definita sopra coincide con l'unica soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in I; \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

(3) Si provi che l'operatore $T : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ è simmetrico e compatto.

(4) Si provi che u è soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in I; \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (6.20)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, se e solo se u è soluzione dell'equazione integrale

$$u + \lambda Tu = F \quad \text{in } I, \quad (6.21)$$

dove $F(x) = \int_a^b g(x, y)f(y)dy$ per $a \leq x \leq b$.

(5) Si provi per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema (6.20) ammette soluzione debole unica u , per ogni dato $f \in L^2(I)$. Mostrare che tale insieme contiene un intervallo $|\lambda| < c \frac{1}{(b-a)^2}$, e stimare la costante $c > 0$.

(6) Provare che per ogni $g \in L^2(\mathbb{R})$ esiste unica soluzione debole $u \in W^{1,2}(\mathbb{R})$ del problema

$$-u'' + u = f \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (6.22)$$

Mostrare che l'operatore $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tale che $A(f) = u$, dove u è l'unica soluzione debole del problema (6.22), è lineare, simmetrico, continuo, ma non è compatto.

Dimostrazione. Osserviamo che fissato $a \leq y \leq b$ la funzione g può essere espressa in questo modo:

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-a)(b-y)}{b-a}, & a \leq x \leq y; \\ \frac{(y-a)(b-x)}{b-a}, & y \leq x \leq b, \end{cases}$$

per cui si ha che $g(x, y) = g(y, x)$.

(1) Fissiamo $f \in L^2(I)$ e proviamo che l'operatore T definito su $L^2(I)$ è tale che $T(f) \in L^2(I)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene

$$\int_a^b \left| \int_a^b g(x, y)f(y)dy \right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |g(x, y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |f|^2 dy \right) dx < \infty, \quad (6.23)$$

quindi $T(f) \in L^2(I)$. Dalla linearità dell'integrale segue che T è lineare; inoltre T è continuo, dal momento che dalla relazione (6.23) segue che T è limitato in un intorno di 0, ovvero esiste $M > 0$ tale che $\|T(f)\|_2 \leq M\|f\|_2$ per ogni $f \in L^2(I)$ (la costante M esiste perché g è continua e limitata sul compatto $[a, b] \times [a, b]$).

Vale la stima

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \leq \sup_{f \neq 0} \frac{\left[\int_a^b \left(\int_a^b |g(x, y)|^2 dy \right) \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}}}{\|f\|_{L^2}} = \\ &= \left[\int_a^b \left(\int_a^b |g|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}(b-a)^2.\end{aligned}$$

Consideriamo ancora l'operatore T e proviamo che in particolare vale $T(f) \in W^{1,2}(I)$, proviamo cioè che

$$u'(x) = \int_a^b g_x(x, y) f(y) dy$$

è la derivata debole di u e che $u'(x) \in L^2(I)$.

Sia $\varphi \in C_0^\infty(I)$; proviamo che

$$\int_a^b u' \varphi dx = - \int_a^b u \varphi' dx.$$

Infatti, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y) f(y) dy \right) \varphi(x) dx &= - \int_a^b \varphi'(x) \left(\int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y) f(y) dy \right) dx \right) dx = \\ &= - \int_a^b \varphi'(x) \left(\int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y) f(y) dx \right) dy \right) dy = \\ &= - \int_a^b \varphi'(x) \left(\int_a^b g(x, y) f(y) dy \right) dx = \\ &= - \int_a^b \varphi'(x) u(x) dx.\end{aligned}$$

Inoltre applicando la disuguaglianza di Hölder si ottiene che

$$\int_a^b |u'(x)|^2 dx = \int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y) f(y) dy \right)^2 dx \leq \int_a^b \|g_x\|_2^2 \|f\|_2^2 dx \leq (b-a) \|g_x\|_2^2 \|f\|_2^2,$$

quindi $\|u'(x)\|_2 < \infty$, cioè $u' \in L^2(I)$. Per la linearità e la continuità si ragiona in maniera analoga al caso precedente.

Stimiamo la norma $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, W^{1,2})}$

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, W^{1,2})} &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|T(f)\|_{W^{1,2}}}{\|f\|_{L^2}} = \\ &= \sup_{f \neq 0} \frac{\|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} = \sup_{f \neq 0} \left\{ \|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} + \frac{\|u'\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} \right\} \leq \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} + \left[\int_a^b \left(\int_a^b |g_x(x, y)|^2 dy \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{10}}(b-a)^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}(b-a),\end{aligned}$$

dove per ottenere l'ultima disuguaglianza si è applicata la disuguaglianza di Hölder.

(2) Data $f \in L^2(I)$, u è soluzione debole del problema (6.19) se

$$\int_a^b u'v' dx = \int_a^b f v dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I).$$

Basta verificare che

$$\int_a^b g_x(x, y)v'(x)dx = v(y),$$

dal momento che

$$\begin{aligned}\int_a^b u'(x)v'(x)dx &= \int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y)f(y)dy \right) v'(x)dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b g_x(x, y)v'(x)dx \right) f(y)dy.\end{aligned}$$

L'uguaglianza è soddisfatta poiché

$$\int_a^b g_x(x, y)v'(x)dx = \int_a^y \frac{b-y}{b-a}v'(x)dx + \int_y^b \frac{a-y}{b-a}v'(x)dx = v(y).$$

(3) Lo spazio $L^2(I)$ è uno spazio di Hilbert, quindi dato $T : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ esiste una forma bilineare limitata $a : L^2 \times L^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$a(f, v) = (T(f), v) = \int_a^b T(f)v(x)dx.$$

La simmetria di T discende dal fatto che, per quanto osservato all'inizio, $\int_a^b g(x, y)dx =$

$\int_a^b g(x, y) dy$. Infatti

$$\begin{aligned} a(f, v) &= (T(f), v) = \int_a^b \left(\int_a^b g(x, y) f(y) dy \right) v(x) dx = \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b g(x, y) v(x) dx \right) f(y) dy = (T(v), f) = a(v, f). \end{aligned}$$

Proviamo ora che T è compatto (ricordiamo che T è compatto se è continuo e trasforma insiemi limitati in relativamente compatti).

Consideriamo la successione (f_n) di funzioni limitate in $L^2(I)$, ovvero esiste $M > 0$ tale che $\|f_n\|_2 \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia

$$u_n = T(f_n) = \int_a^b g(x, y) f_n(y) dy,$$

e

$$u'_n = \int_a^b g_x(x, y) f_n(y) dy \in L^2(I)$$

la sua derivata debole. Allora u_n è una successione limitata nella norma di $W^{1,2}(I)$, e quindi per il teorema di Ascoli-Arzelà 6.4 $u_n = T(f_n)$ è uniformemente convergente, per cui esiste un'estratta convergente nella norma di $L^2(I)$, dunque T è compatto.

(4) Supponiamo che u sia soluzione debole di (6.20), cioè per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ è verificata

$$\int_a^b u' v' dy + \lambda \int_a^b u v dy = \int_a^b f v dy \quad \forall v \in W_0^{1,2}(I).$$

Osserviamo che, fissato $a \leq x \leq b$, $g(x, y) \in W_0^{1,2}(I)$, e quindi

$$\int_a^b u'(y) g_y(x, y) dy + \lambda \int_a^b u(y) g(x, y) dy = \int_a^b f(y) g(x, y) dy,$$

ovvero

$$\int_a^b u'(y) g_y(x, y) dy + \lambda T(u) = F(x)$$

e dato che

$$\int_a^b u'(y) g_y(x, y) dy = \int_a^x u'(y) \frac{(b-x)}{(b-a)} dy + \int_x^b u'(y) \frac{(a-x)}{(b-a)} dy = u(x)$$

si ha che u è anche soluzione dell'equazione integrale (6.21).

Viceversa, se u è soluzione di (6.21), derivando si ottiene

$$u'(x) + \lambda \int_a^b u(y) g_x(x, y) dy = \int_a^b f(y) g_x(x, y) dy.$$

Moltiplicando per $v'(x)$, con $v(x) \in W_0^{1,2}([a, b])$, e integrando rispetto a x

$$\int_a^b \left[u'(x) v'(x) dx + \lambda \int_a^b u(y) g_x(x, y) v'(x) dy \right] dx = \int_a^b \int_a^b f(y) g_x(x, y) v'(x) dy dx$$

e con analoghi calcoli si ricava che u è soluzione debole di (6.20).

(5) Per quanto dimostrato al punto precedente, il problema (6.20) ha unica soluzione debole $\bar{u}$ se e solo se l'equazione integrale (6.21) ammette unica soluzione $\bar{u}$.

Consideriamo l'operatore $S : L^2(I) \longrightarrow L^2(I)$ definito da

$$S(u) = F - \lambda T(u).$$

L'operatore S verifica

$$\begin{aligned} \|S(u) - S(v)\|_2 &= \|F - \lambda T(u) - F + \lambda T(v)\|_2 = |\lambda| \|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \|u - v\|_2 \leq \\ &\leq |\lambda| \cdot \frac{1}{3\sqrt{10}} (b - a)^2 \cdot \|u - v\|_2, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla stima che avevamo ottenuto su $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}$. Per valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che

$$0 < \frac{|\lambda|}{3\sqrt{10}} (b - a)^2 < 1,$$

S è una contrazione. Applicando il teorema delle contrazioni 6.9 si conclude che S ha un unico punto fisso $\bar{u}$, che è l'unica soluzione dell'equazione integrale (6.21) e dunque l'unica soluzione debole di (6.20).

L'insieme dei λ così determinato contiene un intervallo del tipo $|\lambda| < c(b - a)^{-2}$ con $c = 3\sqrt{10}$.

(6) L'esistenza e l'unicità della soluzione debole per il problema (6.22) seguono dal teorema di rappresentazione dei funzionali negli spazi di Hilbert 5.3.

Ripetendo i ragionamenti fatti nei punti precedenti si può dimostrare che l'operatore $A : f \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow Af = u \in L^2(\mathbb{R})$ è lineare, continuo e simmetrico.

Mostriamo che A non è compatto. Consideriamo la successione di funzioni $f_n(x) =$

$f(x - n)$ che sono limitate in $L^2(\mathbb{R})$; le rispettive soluzioni $u_n(x) = \bar{u}(x - n)$ non convergono fortemente (essendo traslazioni), dunque A non è compatto. $\square$

Bibliografia

- [1] G. Birkhoff E. Kreyszig *The Establishment of Functional Analysis*, HISTORIA MATEMATICA 11, 258-321 (1984).
- [2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, (1983).
- [3] H. Brezis, *Analisi funzionale, Teoria ed applicazioni*, (traduzione italiana) Liguori Ed., (1986).
- [4] E. De Giorgi, *Sviluppi dell'analisi funzionale nel Novecento*, all'indirizzo <http://matematica-old.unibocconi.it/caccioppoli/degiorgi.htm>
- [5] E. Giusti, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, UMI, (1994).
- [6] A. N. Kolmogorov S. V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*, Ed. Mir (1980).
- [7] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, (1989).
- [8] E. Mascolo, *Appunti dalle lezioni di analisi funzionale*, all'indirizzo <http://web.math.unifi.it/users/mascolo>