

Elvira Mascolo

Università di Firenze, Viale Morgagni 67/a, 50134 Firenze, Italia
email: elvira.mascolo@unifi.it, web: www.math.unifi.it/mascolo

Appunti di Calcolo delle Variazioni

May 1, 2022

Contents

1	Introduzione al Calcolo delle Variazioni	1
1.1	Funzionali Integrali	1
1.2	Sviluppo storico del Calcolo delle Variazioni	5
1.3	Alcuni importanti funzionali e problemi del Calcolo delle Variazioni	9
2	Equazione di Euler-Lagrange	15
2.1	Equazione di Euler-Lagrange	15
2.2	Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni	21
2.3	Derivazione dell'Equazione di Euler-Lagrange	25
2.4	Osservazioni sull'Equazione di Euler-Lagrange (I)	32
2.5	Osservazioni sull'Equazione di Euler-Lagrange (II)	37
3	Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni	41
3.1	Principio di Dirichlet	41
3.2	Spazi di Sobolev	47
3.2.1	Spazi di Sobolev in una dimensione	47
3.2.2	Spazi di Sobolev in n dimensioni	49
3.2.3	Formulazione variazionale di problemi ellittici	52
3.2.4	Convergenza debole negli Spazi di Sobolev	53
3.3	Applicazione dei Metodi Diretti	54
3.3.1	Integrale di Dirichlet: Caso Modello	54
3.3.2	Caso Generale	56
3.3.3	Condizione sufficiente per la semicontinuità	60
3.4	Risultato di regolarità	63

Introduzione al Calcolo delle Variazioni

1.1 Funzionali Integrali

Il Calcolo delle Variazioni è quella branca della Matematica che si occupa della determinazione e dell'analisi dei valori massimi e minimi e dei corrispondenti punti di massimo e di minimo di speciali applicazioni dette *funzionali*. In tutti i campi dell'investigazione scientifica intervengono problemi collegati alla ricerca del massimo o del minimo di entità che possono essere espresse come funzioni di altre variabili. Se si osserva ad esempio l'evoluzione di un organismo vivente si vede che tutte le funzioni essenziali per sopravvivere sono potenziate al massimo, mentre il costo come fabbisogno di cibo e di mezzi di difesa deve essere ridotto al minimo. Le foglie di una pianta cercano di ottimizzare la loro esposizione alla luce solare, molte specie di uccelli cercano di ottimizzare il dispendio di energia dovuto al volo prolungato anche a scapito di un percorso più lungo, infine le api formano le superfici delle celle dell'alveare in modo tale che la quantità di cera utilizzata sia la minima possibile. In alcuni processi le quantità da minimizzare o massimizzare possono essere espresse in termini di funzioni a valori reali di una o più variabili reali. In molti altri invece si tratta di funzioni reali definite in *insiemi di funzioni*. Data $\mathbf{U}$, una classe di funzioni, l'applicazione I definita in $\mathbf{U}$ ed a valori reali è chiamata funzionale definito in $\mathbf{U}$. Il calcolo delle variazioni si interessa di funzionali speciali: quelli che hanno un'espressione integrale. Il Calcolo delle Variazioni è uno degli argomenti più antichi dell'analisi matematica. Alcuni storici fanno risalire l'inizio a Zenodote (200 anni prima di Cristo) che studiò una sorta di disuguaglianza isoperimetrica, altri ritengono che il Calcolo delle Variazioni nasce nel 17° secolo, con le ricerche di Fermat (1662), Newton (1686) e Giovanni Bernoulli (1696), con il pretesto che gli studi precedenti erano di natura prevalentemente geometrica. Il problema proposto da Fermat è il seguente:

determinare la traiettoria di un raggio luminoso che attraversa un mezzo di indice di rifrazione non costante.

Il problema di Newton consiste

nel determinare la forma che doveva avere un solido a simmetria sferica, perché immerso in un fluido nel senso del suo asse, incontri la minima resistenza possibile, facendo l'ipotesi che tale resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità.

Tuttavia il problema che dette inizio alla teoria analitica del Calcolo delle Variazioni fu quello della *brachistocrona* o curva di minimo tempo di discesa (brachistos- il più breve e cronos - tempo), problema che Galileo aveva già formulato nel 1638:

determinare il percorso che un punto materiale pesante, cioè soggetto alla sola forza di gravità, deve seguire per connettere nel più breve tempo possibile due punti A e B.

Il problema fu proposto a Giovanni Bernoulli nel 1696 e da lui risolto nell'anno successivo.

Sia $A = (0, 0)$ un punto del piano, che scegliamo come origine nel sistema di riferimento e $B = (x_1, u_1)$ un altro punto, che non si trova sulla retta verticale che passa per A . Sia $u = u(x)$ una curva che passa per i punti A e B e quindi tale che $u(0) = 0$ e $u(x_1) = u_1$. L'equazione del moto del punto materiale con velocità iniziale v_0 in A è $ma = F$ e l'energia è data da

$$E(u, v) = \frac{1}{2}mv^2 - gmu = E(0, v_0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Si ricava

$$v^2 = 2gu + v_0^2$$

e quindi

$$v = \sqrt{2gu + v_0^2}$$

Il tratto di curva ha come ascissa curvilinea $ds = \sqrt{1 + u'^2(x)}dx$ ed è percorso con una velocità

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gu + v_0^2}$$

quindi ricavando dt nell'ultima relazione e sostituendo dx , si ottiene che il tempo impiegato da punto a percorrere il tratto AB è dato da

$$T(u) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{\sqrt{2gu + v_0^2}} dx$$

Dal punto di vista matematico il problema si riconduce quindi alla determinazione della curva $u = u(x)$, che passa per i punti A e B , $u(0) = 0$ e $u(x_1) = u_1$, che rende minimo l'integrale. $T(u)$ è un funzionale del Calcolo delle Variazioni.

Diamo la definizione generale di funzionale del Calcolo delle Variazioni. Dato un intervallo $[a, b]$ ed una funzione $f : (x, s, z) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, un funzionale del Calcolo delle Variazioni ha la forma

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx,$$

dove u appartiene ad una classe opportuna di funzioni ammissibile che rende finito l'integrale in I .

Nel caso di più dimensioni: dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ed una funzione $f : (x, s, z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}$, ad ogni funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, con $n, N \geq 1$, corrisponde un numero reale $I(u)$ definito come

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) \, dx,$$

dove $Du(x) = \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} \right)$, $1 \leq \alpha \leq N$ e $1 \leq i \leq n$, denota la matrice Jacobiana. Il problema consiste nel determinare l'estremo superiore o inferiore di $I(u)$, quando u varia nella classe delle funzioni ammissibili $\mathbf{U}$ e nella ricerca dell'eventuale punto di minimo o di massimo, cioè di una funzione $u_0 \in \mathbf{U}$ tale che

$$I(u_0) \leq I(u) \quad (I(u_0) \geq I(u)) \quad \forall u \in \mathbf{U}.$$

Nel caso della brachistocrona la classe delle funzioni ammissibili è data dalle funzioni continue e derivabili in $[0, x_1]$ che assumono valori assegnati in 0 ed in x_1 . In più dimensioni la classe delle funzioni ammissibili può essere il sottoinsieme delle funzioni $u \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tali che $u = \phi$ su $\partial\Omega$, con ϕ funzione assegnata.

Limitiamoci allo studio dei minimi. Vediamo come si affronta il problema della ricerca del minimo per una funzione g definita in $A \subset \mathbb{R}^n$ ed a valori reali. Si determinano prima i punti stazionari di g cioè i punti x_0 che annullano il differenziale, detto anche variazione prima, di $g : dg(x_0) = 0$. In un secondo momento si riconosce la natura del punto critico studiando le derivate seconde di g . Un altro metodo è basato sulla nozione di continuità inferiore, per successioni:

Definition 1.1. Una funzione g si dice inferiormente semicontinua per successioni se per ogni successione $(x_k) \subset A$ convergente a un punto x_0 si ha

$$g(x_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} g(x_k).$$

L'esistenza del minimo è quindi assicurata dalla seguente generalizzazione del noto *Teorema di Weierstrass*:

Una funzione inferiormente semicontinua definita in un insieme chiuso e limitato (e quindi in $\mathbb{R}^n$ compattoquindi compatto) ammette un punto di minimo.

Per i funzionali del Calcolo delle Variazioni si può procedere in modo analogo o determinando le funzioni che rendono nulla la variazione prima del funzionale oppure utilizzando la nozione di semicontinuità inferiore.

Lo sviluppo, anche storico del Calcolo delle Variazioni, si divide in due metodi fondamentali, che vengono chiamati rispettivamente *Metodo Classico* e *Metodo Diretto*.

Nel metodo classico si definisce la variazione prima di I , che si indica δI , e che è ancora un funzionale su una particolare classe detta delle *variazioni ammissibili*. I minimi di I sono le funzioni per le quali la variazione prima è il funzionale nullo. Vedremo che per la forma integrale si deduce che $\delta I = 0$ è equivalente ad un'equazione differenziale.

Diamo un'idea di questa affermazione, considerando nel caso unidimensionale. Consideriamo il problema di minimo relativo al funzionale

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) \, dx,$$

nella classe delle funzioni ammissibili $u \in C^1([a, b])$ tali che $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$ e supponiamo che f sia sufficientemente regolare.

Sia u_0 un minimo allora per ogni variazione ammissibile, cioè per ogni funzione $h \in C^1([a, b])$ e tale che $h(a) = h(b) = 0$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$I(u_0) \leq I(u_0 + th)$$

Definita allora $G(t) = I(u_0 + th)$ deve essere;

$$G'(0) = \left[\frac{d}{dt} I(u_0 + tv) \right]_{t=0} = 0$$

Il *funzionale variazione prima* di I , definito sulle funzioni $h \in C^1([a, b])$ tali che $h(a) = h(b) = 0$ è definito come

$$\delta I(u_0)(h) = \left(\frac{dI(u_0 + th)}{dt} \right)_{t=0}$$

Da altra parte, calcolando direttamente $G'(0) = 0$, dal teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale, per ogni h :

$$\int_a^b f_z(x, u_0(x), u'_0(x))h' + f_s(x, u_0(x), u'_0(x))h \, dx = 0$$

Applicando il procedimento di integrazione per parti e tenendo conto del fatto che $h(a) = h(b) = 0$ si ha che $\delta I(u_0) = 0$ quando per ogni h appartenente alla classe delle variazioni ammissibili, vale:

$$\int_a^b \left(-\frac{df_z}{dx}(x, u_0(x), u'_0(x)) + f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) \right) h \, dx = 0$$

Dalla regolarità di f ed u_0 si riesce a dimostrare la funzione in parentesi deve essere necessariamente nulla (segue dal *Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni*) e quindi u_0 deve essere soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{df_z}{dx}(x, u_0(x), u'_0(x)) = f_s(x, \bar{u}(x), u'_0(x))$$

Quest'ultima equazione differenziale ordinaria non lineare del secondo ordine, è detta *Equazione di Euler-Lagrange* del funzionale I .

Le soluzioni dell'Equazione di Euler-Lagrange vengono chiamate *estremali* o *soluzioni stazionarie* del funzionale integrale.

Si conclude dunque che: ogni minimo u_0 del problema deve essere una soluzione dell'equazione differenziale con le stesse condizioni agli estremi $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$.

1.2 Sviluppo storico del Calcolo delle Variazioni

Il Metodo Classico del Calcolo delle Variazioni per la ricerca del minimo (o massimo) determinare le estremali del funzionale risolvendo l'equazione di Euler-Lagrange.

L'esistenza del minimo può poi essere stabilita dalle proprietà del problema, ad esempio dall'unicità delle soluzioni dell'equazione di Euler-Lagrange o anche determinando e studiando *la variazione seconda del funzionale*, che permette in alcuni casi di stabilire la natura del punto stazionario.

Intorno al 1662 Fermat scrisse alcuni importanti articoli sul metodo della ricerca dei massimi e dei minimi, soprattutto legati alle leggi della rifrazione ed in essi enuncia il suo famoso principio: *la natura opera sempre per mezzi e modi che sono i più facili ed i più veloci*, e *la natura si muove lungo le traiettorie più corte*.

Gli studi di Newton sui moti dei corpi, sono strettamente legati a ricerche di Fermat, anche se i suoi risultati sono contenuti nei *Principia* senza troppi dettagli e dimostrazioni.

Ma come abbiamo già detto la teoria inizia con gli studi di Giovanni Bernoulli sul problema della brachistocrona, che risolto anche da Leibniz, dal fratello Giacomo Bernoulli e in modo anonimo pare anche da Newton.

Sono dovute a Giacomo Bernoulli alcune considerazioni generali ed in particolare l'analogia con i noti problemi isoperimetrici: determinare le figure di assegnato perimetro ed area massima o minima.

Non è noto quando Euler si interessò per la prima volta di Calcolo delle Variazioni, ma probabilmente fu durante un periodo trascorso a Basilea con Giovanni Bernoulli.

Euler pubblica nel 1744 il primo articolo veramente importante sull'argomento, dove cerca di stabilire un metodo generale per la risoluzione di questo tipo di problemi.

Euler tratta 100 problemi speciali e, non solo li risolve, ma inizia una nuova e generale teoria, nel senso che passa da una discussione caso per caso ad un tentativo di *metodo di risoluzione generale*, che valga per tutti.

Il metodo introdotto, anche se molto lontano da quello che viene oggi usato, contiene il seme di quel procedimento che fu in seguito approfondito e sviluppato da Lagrange noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. In questo periodo non mancarono lavori e risultati sbagliati, anche di Euler, ma le idee che essi contengono, sono alla base di tutta l'analisi matematica moderna. Inoltre tutta l'opera di Euler, per quanto semplice e geniale nei risultati, è estremamente artificiosa nelle dimostrazioni.

Le idee di Euler furono riprese, sviluppate e sistematizzate da Lagrange, che, secondo alcuni storici, è il vero fondatore del Calcolo delle Variazioni. Lagrange si propose di *piegare*, come lui stesso afferma, il calcolo differenziale al nuovo tipo di problemi.

In un famoso articolo del 1792, sulla *Memorie di Torino*, riconosce l'opportunità di introdurre una nuova notazione per indicare la variazione di un funzionale ed introduce il simbolo δI , che è poi diventato di uso comune.

Ed è appunto l'introduzione della nuova tecnica *delle variazioni*, che Euler, in suo onore, chiama questi argomenti *Calcolo delle Variazioni*.

Gli studi di Euler e Lagrange avevano dato le condizioni necessarie per i minimi: l'annullarsi della variazione prima porta ad un'equazione differenziale di cui il minimo è una soluzione.

Osserviamo che nelle dimostrazioni di Euler e Lagrange, si usa il fatto che l'annullarsi dell'integrale, che rappresenta la variazione prima, implica l'annullarsi della funzione integranda. Tale proprietà fu ritenuta all'inizio quasi un assioma e solo in seguito ne fu data la dimostrazione da Du Bois-Raymond, Shiffer e Mayer.

Nel 1786 Legendre fu il primo studioso ad introdurre il concetto di variazione seconda del funzionale, per ottenere le condizioni sufficienti per i minimi.

Il problema di trasformare la variazione seconda fu affrontato da Jacobi intorno al 1837. Si trattava di un problema estremamente complicato e Jacobi enunciò una serie di risultati senza darne una reale dimostrazione.

Nello stesso periodo Hamilton pubblica una serie di articoli in meccanica in cui dimostra che il moto di una particella nello spazio, sotto l'azione di forze, può essere descritto attraverso una sola funzione che soddisfa due equazioni differenziali a derivate parziali. Per lo studio della variazione seconda si utilizza quindi l'*Equazione di Hamilton-Jacobi*, strettamente legata all'Equazione di Euler-Lagrange.

Le idee di Jacobi richiamarono l'attenzione di vari matematici, come Lebesgue, Dulaunay e Bertrand che cercarono di dimostrare i teoremi enunciati da Jacobi. Tali congetture risultarono esatte, ma le dimostrazioni sono complesse, che non si riesce a comprendere come Jacobi avesse potuto intuirli.

Intorno alla metà del 1800 i matematici prendono due direzioni diverse: da una parte Clebsch e Mayer cercano di stabilire risultati generali per unificare le varie classi di problemi dall'altra Weierstrass sistema su basi rigorose gli argomenti che nei secoli precedenti erano stati sviluppati e dimostra nuove condizioni sufficienti.

Nel 1884 nelle sue famose lezioni tenute a Berlino, Weierstrass dà una sistemazione rigorosa alle idee di Jacobi e molte delle sue considerazioni e metodi ancora oggi si trovano nei trattati.

I Metodi classici del Calcolo delle Variazioni riducono la questione dell'esistenza del minimo di funzionali integrali all'esistenza di soluzioni della equazione differenziale di Euler-Lagrange.

Nel caso di una dimensione, si tratta di risolvere un problema agli estremi per equazioni differenziali ordinarie, ma è noto che per problemi di questo tipo l'esistenza delle soluzioni è provata solo in casi particolari, a differenza del problema di Cauchy ai valori iniziali.

Nel caso di integrali multipli si tratta invece di risolvere equazioni differenziali a derivate parziali quando $n > 1$ e $N = 1$, oppure di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali nel caso $n > 1$ e $N > 1$, la cui risoluzione può essere estremamente difficile.

Alla fine del 1800 Riemann dà un nuovo impulso alle ricerche sul Calcolo delle Variazioni con un approccio differente:

Risolvere equazioni differenziali attraverso l'esistenza di minimi di funzionali integrali.

Questo procedimento prende il nome di *Principio di Dirichlet*.

Assegnata un'equazione differenziale, se essa è l'equazione di Euler-Lagrange di un funzionale integrale, stabilendo l'esistenza del minimo per il funzionale, si ottiene la soluzione dell'equazione di partenza.

Si deve quindi provare in modo diretto l'esistenza del minimo per ottenere come conseguenza l'esistenza di soluzioni della relativa equazione di Euler-Lagrange.

Nasce così il *procedimento dei Metodi Diretti* che si basa sulla generalizzazione del Teorema di Weierstrass e quindi sulla nozione di semicontinuità inferiore, la convergenza (compattezza) delle successioni minimizzanti.

Il procedimento dei Metodi Diretti consiste dei seguenti passi:

(a) provare che l'estremo inferiore m di I in $\mathbf{U}$ è finito;

- (b) provare l'esistenza di una successione minimizzante di I in $\mathbf{U}$, cioè una successione $(u_h)_h$ tale che

$$m = \lim_{h \rightarrow \infty} I(u_h),$$

che converge o ammette una sottosuccessione convergente ad una funzione $u_0 \in \mathbf{U}$ nella topologia τ .

- (c) garantire la semicontinuità inferiore del funzionale I .

Quando queste condizioni sono soddisfatte, si ottiene

$$I(u_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h) = m.$$

e segue che u_0 è un minimo di I in $\mathbf{U}$.

Si riconosce che la nozione di semicontinuità, più debole di quella di continuità, è quella giusta per la ricerca del minimo.

Tuttavia rimane il problema di determinare nella classe $\mathbf{U}$ un' opportuna topologia in cui le successioni minimizzanti convergono, siano dunque compatte (una topologia quindi con pochi aperti) ma rispetto alla quale il funzionale I sia semicontinuo

Grazie all'introduzione dei Metodi Diretti, dalla fine del 1800 e in tutto il 1900 vi sono stati importanti contributi sia alla teoria dell'equazioni differenziali sia al Calcolo delle Variazioni. All'inizio del 1900 il Calcolo delle Variazioni era considerato uno dei problemi più interessanti della matematica. Al Congresso dei Matematici a Parigi del 1900, Hilbert, che era un dei matematici più importanti di quel periodo, presentò una relazione, in cui sulla base degli indirizzi di ricerca matematica più fiorenti alla fine del glorioso secolo XIX, tentò di prevedere la direzione dei progressi futuri e formulò 23 problemi, che a suo giudizio avrebbero impegnato l'attenzione dei matematici del XX secolo. Di questi ben tre il 19, il 20 ed il 23, riguardavano il calcolo delle variazioni.

L'intuizione di Hilbert si è rivelata profetica, la teoria che nel 1900 era appena agli inizi, nel 1900 si è sviluppata in direzioni che Hilbert non avrebbe sicuramente mai immaginato, anche grazie all'introduzione degli spazi di Sobolev. Intorno al 1930, Sobolev introduce una nuova classe di funzioni, che portano il suo nome, anche se va ricordato che negli stessi anni Colkin e Morrey (e anche Beppo-Levi) avevano indipendentemente considerato funzioni dello stesso tipo: si tratta di funzioni di classe L^p dotate di un tipo particolare di derivata detta *debole*, che appartiene ancora a L^p .

Questi spazi hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria delle Equazioni Differenziali e del Calcolo delle Variazioni, con l'introduzione delle *Soluzioni Deboli*.

Vedremo che introducendo negli spazi di Sobolev la cosiddetta topologia *debole* e assumendo alcune condizioni sulla la funzione integranda $f(x, s, z)$ (ad esempio nel caso $n \geq 1$ e $N = 1$ convessa nella variabile z), si prova che I

è semicontinuo inferiormente rispetto alla cosiddetta convergenza *debole* delle successioni.

A partire dal lavoro di Riemann e Hilbert sul principio di Dirichlet importanti progressi si sono avuti nei primi 50 del secolo scorso dovuti a S. Bernstein, J. Hadamard, H. Lebesgue, E. Hopf, R. Courant, Oskar Perron, Jules Schauler, J. Laray, K.O. Friedrichs, G. Giraud, C. B. Morrey jr., J. Serrin ed molti altri altri.

Un elenco ancora più lungo sarebbe necessario per gli anni successivi al 1950. Particolarmente importante è stato il contributo della Scuola Italiana, a partire dagli studi di Leonida Tonelli intorno al 1920, con il fondamentale lavoro di Ennio De Giorgi e dei suoi allievi.

1.3 Alcuni importanti funzionali e problemi del Calcolo delle Variazioni

- **Principio di Fermat o dell'ottica geometrica.** Il problema di Fermat di cui abbiamo parlato all'inizio, si trasforma, in termini matematici, nella ricerca dei minimi del funzionale I dove

$$I(u) = \int_a^b g(x, u) \sqrt{1 + u'^2(x)} \, dx$$

nella classe delle funzioni $u \in C^1([a, b])$ tali che $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$.

- **Problema di Newton.** Il problema di Newton enunciato all'inizio si descrive nella minimizzazione del funzionale I dove

$$I(u) = \int_a^b 2\pi \frac{uu'^3}{1 + u'^2} \, dx$$

anche in questo caso nella classe delle funzioni di $C^1([a, b])$, con valori assegnati agli estremi a e b .

- **Problema della brachistocrona.** Abbiamo dedotto che si tratta di trovare il minimo del funzionale I con

$$I(u) = \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (u')^2(x)}{gu(x)}} \, dx$$

nella classe delle funzioni $u \in C^1([a, b])$ tali che $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$ e $u > 0$. Si prova che la soluzione è una *cicloide*

- **Superficie minima di rotazione.** Si tratta di determinare tra le superfici di rotazione, cioè della forma $v(x, y) = (x, u(x) \cos y, u(x) \sin y)$, con $x \in [a, b]$ e valori assegnati agli estremi $u(a) = \alpha$ e $u(b) = \beta$, quella di area

minima. Il problema si traduce nella minimizzazione di un funzionale di forma integrale, dove

$$I(u) = \int_a^b 2\pi u \sqrt{1 + u'^2(x)} \, dx$$

Il problema non sempre ha soluzioni sono infatti necessarie alcune condizioni di compatibilità rispetto ad α e β , se la soluzione esiste, è una curva, detta Catenaria, di equazione

$$u(x) = \lambda \cosh \frac{x + \mu}{\lambda}$$

- **Sistema Meccanico.** Consideriamo un sistema meccanico di K particelle di massa m_i e la posizione in $\mathbb{R}^3$ all'istante t è data da $u_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$, per $1 \leq i \leq K$. Per $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, sia $T = T(\mathbf{u})$ l'energia cinetica e $U = U(t, \mathbf{u})$ l'energia potenziale del sistema, definiamo la funzione:

$$f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = T(\mathbf{u}') - U(t, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K m_i \|u'_i\|^2 - U(t, \mathbf{u})$$

Il *Principio di minima azione di Hamilton* consiste nella ricerca delle funzioni u_i che sotto opportune ipotesi, rendono minimo l'integrale

$$I(u) = \int_a^b f(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \, dx,$$

- **Problema isoperimetrico.** Si tratta di determinare la figura piana $\mathbf{D}$ con perimetro assegnato ed area minima. Per formulare analiticamente questo problema supponiamo che la frontiera della figura sia una curva regolare chiusa di equazioni $(x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$. Sia $\tilde{L}$ il valore del perimetro assegnato, cioè la lunghezza della curva, si deve quindi imporre:

$$\tilde{L} = L(x, y) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt.$$

Applicando le formule di Gauss-Green, l'area del dominio racchiuso è dato

$$I(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_a^b y'(t)x(t) - x'(t)y(t) \, dt,$$

quindi si tratta di determinare le funzioni (x, y) che realizzano il minimo del funzionale $I(x, y)$, tra tutte le funzioni definite in $[a, b]$ che soddisfano la condizione $L(x, y) = \tilde{L}$. In questo problema la classe delle funzioni ammissibili è costituita dalle coppie di funzioni (x, y) di classe C^1 nell'intervallo di definizione, tali che $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \neq 0$ e che soddisfano il vincolo integrale.

- **Problema della membrana e Funzionale di Dirichlet.** Dal punto di vista matematico, una membrana elastica può essere considerata come una superficie cartesiana $(x, u(x))$, dove u è definita nella chiusura di un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che la membrana sia incastrata al bordo di Ω e cioè esiste una funzione ϕ definita sulla frontiera $\partial\Omega$ tale che $u = \phi$ su $\partial\Omega$. L'energia potenziale del sistema è proporzionale al cambiamento di area ed il fattore di proporzionalità $T(x, u)$ è detta Tensione. La ricerca delle posizione di equilibrio si traduce, a meno di costanti, nel problema di trovare i minimi del funzionale integrale

$$I(u) = \int_{\Omega} T(x, u) \sqrt{1 + |Du(x)|^2} \, dx,$$

nella classe degli spostamenti ammissibili u , cioè tali che $u = \phi$ sul bordo di Ω . Approssimando al primo ordine $\sqrt{1 + p^2}$ con $1 + 1/2|p|^2$, e supponendo che la tensione non dipenda da x ed u , il problema diventa: Determinare il minimo del seguente funzionale integrale:

$$I(u) = \int_{\Omega} |Du(x)|^2 \, dx,$$

nella classe degli spostamenti ammissibili. Il funzionale I viene chiamato *integrale di Dirichlet*. Nel caso in cui intervenga una forza esterna $f(x)$, il funzionale da minimizzare diventa:

$$I(u) = \int_{\Omega} |Du(x)|^2 + f(x)u(x) \, dx,$$

Il funzionale di Dirichlet definito in opportune classi di funzioni ammissibili è presente anche in altri problemi di natura fisica come il potenziale gravitazionale ed elettrostatico e la distribuzione della temperatura in un corpo. L'equazione di Euler-Lagrange del funzionale di Dirichlet è rappresentato dall'operatore di Laplace $\Delta u = 0$ ed in presenza di forze esterne da $\Delta u = f$

- **Superfici minime.** I metodi diretti hanno avuto un'influenza decisiva nella risoluzione del problema delle superfici minime: Determinare tra tutte le superfici Σ di $\mathbb{R}^3$ con bordo assegnato $\partial\Sigma = \Gamma$ quella di area minima. È noto che si può realizzare sperimentalmente tale superficie, ponendo un filo di ferro, che formi una curva chiusa, nell'acqua saponata e quando si toglie il filo dall'acqua la pellicola di acqua e sapone, che si forma all'interno, è la superficie minima di bordo assegnato. Tale problema, era stato formulato da Lagrange nel 1762, ma bisogna aspettare il 1930 per avere una prima risposta soddisfacente grazie al risultato di esistenza di Rado e Douglas, ottenuto un'attraverso un'opportuna applicazione del metodo diretto. La formulazione matematica del problema delle superfici minime dipende dalla nozione di superficie che si considera.

Superfici minime cartesiane. Supponiamo che la superficie Σ assegnata nello spazio a tre dimensioni $\mathbb{R}^3$ sia cartesiana, sia quindi il grafico di una funzione $(x, y, u(x, y))$ e di conseguenza l'area di Σ è data dalla formula

$$\text{Area}(\Sigma) = I(u) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + |Du(x, y)|^2} \, dx \, dy,$$

Si tratta di determinare il minimo del funzionale precedente nella classe delle funzioni definite in Ω con assegnato valore ϕ sul bordo.

Superfici minime parametriche. Una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$ ha equazione

$$\mathbf{u} = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), z(\xi, \eta))$$

dove $((\xi, \eta) \in K$ con $K \subset \mathbb{R}^2$ ed è regolare quando considerati i due vettori $(\mathbf{u}_{\xi}, \mathbf{u}_{\eta})$, il loro prodotto vettoriale è non nullo ed in questo caso l'area della superficie è data da:

$$\text{Area}(\Sigma) = I(u) = \iint_A \|\mathbf{u}_{\xi} \times \mathbf{u}_{\eta}\| \, d\xi \, d\eta.$$

Si tratta di un funzionale definito in una classe di funzioni vettoriali, $n = 3$ e $N = 3$.

- **Problemi di elasticità non lineare.** Per alcuni materiali, detti iperelastici il problema della ricerca delle configurazioni di equilibrio si descrive attraverso la ricerca di minimi di funzionali integrale della forma:

$$E(u) = \int_{\Omega} f(x, \nabla u, \text{adj} \nabla u, \det \nabla u) \, dx$$

Per ogni matrice A la matrice $\text{adj} A$, è definita attraverso la relazione $A \text{adj} A = \det A \, \text{Id}$ e denota la matrice di tutti i $s \times s$ minori della matrice A , $2 \leq s \leq \min\{n, N\}$. Nel funzionale E la dipendenza da ∇u governa le deformazioni di linea, $\text{adj} \nabla u$, governa le deformazioni di superficie e $\det \nabla u$ misura localmente i cambi di volume e

I problemi di elasticità non lineare possono essere affrontati con il procedimento dei metodi diretti. Si tratta di risultati relativamente recenti, che partono con alcuni articoli di Antman (1970-1973) ed J.L.Ericksen (1980) nel caso unidimensionale e di Ball (1977-1983) nel caso a più dimensioni e proseguono con il contributo di molti matematici tra cui ricordiamo P. G. Ciarlet, B. Dacorogna, I. Fonseca, N. Fusco, D. Kinderlehrer, R. Kohn, J. Maly, P. Marcellini, S. Muller, P. Pedregal, V. Sverak, L. Tartar.

- **Calcolo delle Variazioni in economia, Ramsey 1928** Uno dei problemi più interessanti in è quello di stabilire l'ammontare del capitale $k(t)$ di una nazione, che si può determinare attraverso il seguente problema:

$$\max \left\{ \int_0^T U(f(k(t) - k'(t))e^{-\rho t} \, dt, \, k(0) = K_0, \, k(T) = K_T \right\} \quad (1.3.1)$$

dove $f(k(t))$ rappresenta il prodotto interno lordo della nazione., $f(k(t) - k'(t)$ stabilisce il consumo e U é la funzione utilit , fissata con la propriet  $U' > 0 > U''$ su $[0, \infty[$ quindi U é una funzione concava. Infine il fattore $e^{-\rho t}$, $\rho < 0$, stabilisce una sorta di sconto sul consumo futuro e i dati K_0 e K_T sono i valori iniziali e finali del capitale disponibile. Il massimo valore in (1.3.1) determina la previsione del beneficio che si ottiene dal passaggio del capitale da K_0 a K_T .

Equazione di Euler-Lagrange

2.1 Equazione di Euler-Lagrange

I problemi di Calcolo delle Variazioni di determinare il valore minimo di un assegnato funzionale integrale sono analoghi allo studio dell'ottimizzazione di una funzione reale di variabile, anche se in questo caso l'insieme di definizione è uno spazio di funzioni a dimensione infinita.

Consideriamo una funzione $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: La funzione g è derivabile in t_0 se esiste un numero reale che denotiamo con $g'(t_0)$, tale che

$$g(t_0 + h) - g(t_0) = g'(t_0)h + \varepsilon(h)$$

con $|h| < \tau$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$.

Si ha che t_0 è un punto di minimo relativo per g se esiste τ tale che per ogni $|h| < \tau$

$$g(t_0 + h) \geq g(t_0)$$

Supponiamo che $g \in C^1(I)$ allora vale il Teorema di Fermat e si ha che $g'(t_0) = 0$.

Infatti, dalla derivabilità di g in t_0 segue che:

$$0 \leq g(t_0 + \lambda h) - g(t_0) = g'(t_0)\lambda h + \varepsilon(\lambda h)$$

Se $\lambda > 0$ allora dividendo per λ

$$0 \leq \frac{g(t_0 + \lambda h) - g(t_0)}{\lambda} = g'(t_0)h + \frac{\varepsilon(\lambda h)}{\lambda}$$

e si può concludere che $g'(t_0)h \geq 0$. Ragionando allo stesso modo per $\lambda < 0$ si ha $g'(t_0)h \leq 0$ e quindi necessariamente $g'(t_0) = 0$.

Per ottenere condizioni necessarie per i minimi locali di funzionale definito in un aperto Y di uno spazio normato X , dobbiamo introdurre il concetto di derivata di un funzionale.

Sia $I : Y \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, Y un aperto dello spazio normato X , quindi fissato $y_0 \in Y$ esiste τ tale che per ogni $\|h\| < \tau$ si ha $y_0 + h \in Y$.

Definition 2.1. Differenziale secondo Frechet. *Il funzionale I si dice differenziabile secondo Frechet in $y_0 \in Y$ se esiste un funzionale lineare detto Differenziale di Frechet di I in y_0 , $L_{y_0}^F : X \rightarrow \mathbb{R}$, tale che per ogni $\|h\| < \tau$ (Y aperto e quindi $y + h \in Y$)*

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = L_{y_0}^F(h) + \varepsilon_1(h)$$

con

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(h)}{\|h\|} = 0$$

Il differenziale $df(t_0)$ di una funzione reale di variabile reale differenziabile in t_0 è il Differenziale secondo Frechet.

Definition 2.2. Differenziale secondo Gateaux. *Il funzionale I si dice differenziabile secondo Gateaux in $y_0 \in Y$ se esiste un funzionale lineare detto Differenziale di Gateaux di I in y_0 , $L_{y_0}^G : X \rightarrow \mathbb{R}$, tale che per ogni $\|h\| < \tau$*

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = L_{y_0}^G(h) + \varepsilon_2(h)$$

con

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_2(th)}{t} = 0$$

Il concetto di differenziabilità secondo Gateaux è più debole di quello secondo Frechet. Infatti è evidente che se I è differenziabile secondo Frechet lo è anche secondo Gateaux, ma non vale il viceversa.

Se I è differenziabile secondo Gateaux in y_0 , per t abbastanza piccolo e $\|h\| < \tau$, $y_0 + th \in Y$, si può definire la funzione nella variabile reale t

$$t \rightarrow G(t) = I(y_0 + th)$$

si ha

$$G'(0) = \left[\frac{dI(y_0 + th)}{dt} \right]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + th) - I(y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_{y_0}^G(th) + \varepsilon_2(th)}{t} = L_{y_0}^G(h)$$

Consideriamo il funzionale:

$$h \rightarrow \left[\frac{dI(y_0 + th)}{dt} \right]_{t=0}$$

se è lineare, allora coincide con il differenziale di Gateaux.

Diamo la definizione di Variazione prima secondo Gateaux:

Definition 2.3. Diremo **Variazione prima secondo Gateaux** I in $y_0 \in Y$ e la indicheremo con $\delta I(h)$, il funzionale

$$\delta I(h) = \left[\frac{dI(y_0 + t h)}{dt} \right]_{t=0}$$

Osserviamo che il funzionale $\delta I(h)$ è lineare se e solo se I è differenziabile secondo Gateaux.

Ad titolo d'esempio consideriamo la funzione

$$g(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{se} \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0)$$

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad \text{se} \quad (x_1, x_2) = (0, 0)$$

Si vede facilmente che g ha nel punto $(0, 0)$ derivate lungo tutte le direzioni del piano e quindi esiste $\delta g(h_1, h_2)$:

$$\delta g(0, 0)(h_1, h_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t h_1, t h_2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 h_1 h_2^2}{t^3 (h_1^2 + h_2^2)} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

tuttavia, poiché $\delta g(h_1, h_2)$ non è lineare, g non è differenziabile in $(0, 0)$.

Si ha che il funzionale variazione prima di I è omogeneo:

$$\delta I(\lambda h) = \lambda \delta I(h) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Infatti per $\lambda t = \tau$ si ha

$$\delta I(\lambda h) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lambda \frac{I(y_0 + \tau h) - I(y_0)}{\tau} = \lambda \delta I(h)$$

L'incremento del funzionale $I(y_0 + h) - I(y_0)$ si può rappresentare attraverso la sua variazione prima:

Theorem 2.4. Un funzionale omogeneo del primo ordine $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ è la variazione prima di un funzionale I se e solo se esiste $\tau > 0$ tale che per ogni $h \in X$ con $\|h\| < \tau$ si ha

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = L(h) + \varepsilon(h) \quad (2.1.1)$$

con

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t h)}{t} = 0$$

.

Proof. Sia $L = \delta I$ la variazione prima di I , dalla definizione segue

$$I(y_0 + th) - I(y_0) = t\delta I(h) + t\alpha(th)$$

dove $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(th) = 0$.

Poniamo $k = th$, dalla proprietà di omogeneità di δI

$$I(y_0 + k) - I(y_0) = \delta I(k) + \varepsilon(k)$$

dove $\varepsilon(k) = t\alpha(k)$ e $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(th) = 0$.

Supponiamo che valga (2.1.1) e proviamo $L = \delta I$. Per $h = th$

$$I(y_0 + th) - I(y_0) = tL(h) + \varepsilon(th)$$

dividendo per t e facendo tendere $t \rightarrow 0$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + th) - I(y_0)}{t} = L(h) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(th)}{t} = L(h)$$

Vale inoltre che utilizzando la condizione (2.1.1) la variazione prima di un funzionale I è univocamente determinata.

Supponiamo che L_1 e L_2 siano due funzionali distinti soddisfacenti (2.1.1), segue

$$I(y_0 + th) - I(y_0) = L_1(h) + \varepsilon_1(h) = L_2(h) + \varepsilon_2(h).$$

Sia $h_0 \neq 0$ con $L(h_0) = L_1(h_0) - L_2(h_0) \neq 0$ segue

$$L(h_0) = \varepsilon_1(h_0) - \varepsilon_2(h_0)$$

e quindi

$$L(h_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(th_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_1(th_0) - \varepsilon_2(th_0)}{t} = 0$$

Assegnato $I : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Sigma \subset X$, se Σ non è un aperto o un sottospazio di X , si deve considerare *lo spazio delle variazioni ammissibili*

$$\mathcal{H} = \{h \in X; \quad x + h \in \Sigma \quad \text{per ogni} \quad x \in \Sigma\}$$

Si ha che x_0 è un minimo locale se esiste $\tau > 0$

$$I(x_0) \leq I(x_0 + h), \quad h \in \mathcal{H}, \quad \text{con} \quad \|h\| < \tau$$

.

Vale la seguente generalizzazione del Teorema di Fermat:

Theorem 2.5. *Sia x_0 un minimo locale di I definito in Σ . Se I ammette variazione prima e lo spazio $\mathcal{H}$ delle variazioni ammissibili è un sottospazio lineare di X allora*

$$\delta I(h) = 0 \quad \text{per ogni} \quad h \in \mathcal{H}$$

Proof. Dal Teorema 2.4:

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = \delta I(h) + \varepsilon(h) \quad (2.1.2)$$

con $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(th)}{t} = 0$.

Sia x_0 è un minimo locale esiste τ tale che per ogni $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| < \tau$ si ha

$$\delta I(h) + \varepsilon(h) \geq 0$$

Poiché $\mathcal{H}$ è un sottospazio lineare di X , per ogni t con $|t| < 1$ si ha $\|th\| < \tau$, quindi per $t > 0$

$$\delta I(th) + \varepsilon(th) = t\delta I(h) + \varepsilon(th) \geq 0$$

da cui

$$\delta I(h) + \frac{\varepsilon(th)}{t} > 0$$

e passando al limite per $t \rightarrow 0$ segue $\delta I(h) \geq 0$.

Considerando $t < 0$ si ha $\delta I(h) \leq 0$, da cui segue $\delta I(h) = 0$ per $h \in \mathcal{H}$ con $\|h\| < \tau$.

Sia $h \in \mathcal{H}$, $h \neq 0$ e consideriamo $h_0 = \frac{\tau h}{2\|h\|}$, visto che $\|h_0\| < \tau$ si ha $\delta I(h_0) = 0$ ma dal momento che $\delta I(h)$ è omogeneo, segue $\delta I(h) = 0$ per ogni $h \in \mathcal{H}$.

Consideriamo il seguente funzionale integrale :

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (2.1.3)$$

definito per $u \in C^1([a, b])$ e $f = f(x, s, z)$ di classe $C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ rispetto a tutte le variabili. Sia $u_0 \in C^1([a, b])$ e per t sufficientemente piccolo, consideriamo

$$I(u_0 + th) = \int_a^b f(x, u_0 + th, u'_0 + th') dx$$

dove $h \in C^1([a, b])$, dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale, segue;

$$\delta I(h) = \int_a^b [f_s(x, u_0, u'_0)h + f_z(x, u_0, u'_0)h'] dx \quad (2.1.4)$$

dove f_s, f_z denotano le derivate parziali di f rispetto alle variabili s e z .

Osserviamo che nel caso di funzionali integrali la variazione prima δI è lineare in h .

Supponiamo che il funzionale (2.1.3) sia definito nella classe di Dirichlet;

$$\Sigma = \{u \in C^1([a, b]), \quad u(a) = A \quad u(b) = B\}$$

In questo caso bisogna considerare lo spazio delle variazioni ammissibili

$$\mathcal{H} = \{h \in C^1([a, b]), \quad h(a) = h(b) = 0\}$$

infatti per $u \in \Sigma$ per $h \in \mathcal{H}$ si ha $u + h \in \Sigma$. Dal momento che $\mathcal{H}$ è un sottospazio lineare di $C^1([a, b])$, quindi si può applicare il Teorema 2.5:

Sia $u_0 \in \Sigma$ un minimo locale allora da (2.1.4):

$$\delta I(h) = \int_a^b [f_s(x, u_0, u'_0)h + f_z(x, u_0, u'_0)h']dx = 0 \quad (2.1.5)$$

per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(a) = h(b) = 0$. La (2.1.5) viene chiamata forma debole dell'Equazione di Euler-Lagrange.

Diamo qualche esempio:

1. Definiamo

$$I_1(u) = \int_0^1 (1 - u'^2) dx$$

nella classe $\Sigma = \{u \in C^1([a, b]), \quad u(0) = 0 \quad u(1) = -1\}$. Sia u_0 è un minimo locale di I in Σ allora

$$\delta I_1(h) = \int_0^1 2u'_0 h' dx = 0$$

per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(0) = h(1) = 0$.

2. Sia

$$I_2(u) = \int_0^1 (1 + u'^2) dx$$

nella classe $\Sigma = \{u \in C^1([a, b]), \quad u(0) = u(1) = 0\}$. Se u_0 è un minimo locale di I_2 in Σ , si deve avere

$$\delta I_2(h) = \int_0^1 2u'_0 h' dx = 0$$

per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(0) = h(1) = 0$. In particolare per $h = u_0$

$$\int_0^1 (u'_0)^2 dx = 0$$

che implica $u'_0 = 0$ e quindi u_0 è costante e poiché è nulla agli estremi $u_0 = 0$.

3. Consideriamo

$$I_3(u) = \int_0^1 (u^2 + x u') dx$$

nella classe $\Sigma = \{u \in C^1([a, b]), \quad u(0) = 1 \quad u(1) = 0\}$. Sia u_0 tale che la variazione prima di I_3 in u_0 sia il funzionale nullo:

$$\delta I_3(h) = \int_0^1 (2u_0 h' + x h') dx = 0$$

per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(0) = h(1) = 0$. Integrando per parti

$$[(2u_0 + x) h]_0^1 - \int_0^1 (2u_0 - 1) h dx = 0$$

e poiché $[(2u_0 + x) h]_0^1 = 0$ segue

$$\int_0^1 (2u_0 - 1) h dx = 0$$

Dal Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni (Lemma 2.6), si ha che $2u_0 - 1 = 0$ e cioè $u_0 = \frac{1}{2}$. L'unica soluzione che annulla la variazione prima del funzionale non soddisfa le condizioni agli estremi, quindi I_3 non ha minimi locali.

2.2 Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni

Il paragrafo precedente si è concluso con una condizione integrale per i minimi locali. Per ottenere altre condizioni necessarie per i minimi di funzionali integrali, abbiamo bisogno del *Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni* e di alcune sue varianti. Iniziamo dando l'enunciato di tale lemma in una forma meno generale, ma con dimostrazione meno tecnica.

Theorem 2.6. Sia $g \in C^0([a, b])$ tale che per ogni $h \in C^1([a, b])$, con $h(a) = h(b) = 0$,

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0,$$

allora $g(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Proof. La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che $g(x_0) > 0$ per qualche x_0 . Dal teorema della permanenza del segno esistono x_1 e x_2 , $a \leq x_1 < x_0 < x_2 \leq b$, tali che $g(x) > 0$ per ogni x in (x_1, x_2) . Sia $h : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$,

$$h(x) := \begin{cases} (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 & \text{se } x \in (x_1, x_2) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ovviamente $h \in C^1([a, b])$ e

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} g(x)(x - x_1)^2(x - x_2)^2 > 0,$$

in contraddizione con l'ipotesi.

Inoltre, vale anche il seguente risultato, noto come *Lemma di Du Bois-Raymond*.

Theorem 2.7. Sia $g \in C([a, b])$ tale che

$$\int_a^b g(x)h'(x)dx = 0 \quad \text{per ogni } h \in C^0([a, b]), h(a) = h(b) = 0.$$

Allora g è costante.

Proof. Sia $c := \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)dx$ e definiamo $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) := \int_a^x (g(t) - c) dt.$$

Si ha che $h \in C^0$, $h(a) = h(b) = 0$ e $h'(x) = g(x) - c$ per ogni $x \in [a, b]$. Queste proprietà e l'ipotesi implicano che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (g(x) - c)^2 dx = \int_a^b (g(x) - c)h'(x) dx = \int_a^b g(x)h'(x) dx - c \int_a^b h'(x) dx \\ &= 0 - c(h(b) - h(a)) = 0. \end{aligned}$$

Pertanto g è identicamente uguale a c .

Per dare la dimostrazione del Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni nel caso n -dimensionale abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Diamo la definizione di prodotto di convoluzione tra due funzioni $f * g$.

Theorem 2.8. Siano $f \in L^1_{loc}(R^n)$ e $g \in C^0_0(R^n)$ oppure $f \in L^1(R^n)$ e $g \in L^\infty(R^n)$, allora per quasi ogni $x \in R^n$ la funzione $x \rightarrow f(x - y)g(y)$ è integrabile. Il prodotto di convoluzione di f e g è la funzione definita da:

$$f * g(x) = \int f(y)g(x - y)dy = \int f(x - z)g(z)dz. \quad (2.2.6)$$

Definition 2.9. Una funzione $\phi \in C^\infty_0(R^n)$ si dice mollificatore o nucleo regolarizzante se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\phi(x) \geq 0$,
2. $\text{Supp } \phi \subset \bar{B}_1$ dove $B_1 = \{x : |x| < 1\}$,

$$3. \int_{R^n} \phi(x) = 1.$$

Si verifica facilmente che la funzione $\eta \in C_0^\infty(R^n)$:

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

soddisfa le condizioni dei nuclei regolarizzanti moltiplicata per un opportuna costante.

Definition 2.10. Assegnata $f \in L_{loc}^1$, si chiama ϵ -regolarizzata di f la funzione

$$f_\epsilon(x) = \int f(y) \phi_\epsilon(x-y) dy = \int f(x-z) \phi_\epsilon(z) dz, \quad (2.2.7)$$

dove $\phi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^n} \phi(\frac{z}{\epsilon})$. Si ha quindi che :

$$f_\epsilon(x) = f * \phi_\epsilon = \phi_\epsilon * f.$$

Dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale è facile vedere che per ogni $\epsilon > 0$, $f_\epsilon \in C^\infty$ e che per ogni multindice α

$$D^\alpha f_\epsilon = f * D^\alpha \phi_\epsilon.$$

Inoltre se f è a supporto compatto $K \subset R^n$ allora

$$\text{Supp } f_\epsilon \subset K_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}.$$

Infatti sia $x \in \text{Supp } f_\epsilon$ allora $y = x - z \in \text{Supp } f$ e $z \in \text{Supp } \phi_\epsilon$, segue quindi che $|x - y| = |z| \leq \epsilon$ quindi $\text{dist}(x, K) \leq |x - y| \leq \epsilon$.

Osserviamo che se f non ha supporto compatto non è detto che f_ϵ siano a supporto compatto contenuto in Ω .

Diamo alcune proprietà delle regolarizzate delle funzioni di classe L^p .

Lemma 2.11. Sia $f \in L^p(R^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Allora vale

$$\|f_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p.$$

Proof. Supponiamo che $1 < p < +\infty$, dalla disuguaglianza di Holder

$$\begin{aligned} |f_\epsilon(x)| &\leq \int |f(y)| \phi_\epsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) \phi_\epsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) dy \\ &\leq \left\{ \int |f(y)|^p \phi_\epsilon(x-y) dy \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int \phi_\epsilon(x-y) dy \right\}^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned}$$

Poiché $\int \phi_\epsilon(x-y) dy = 1$ si ottiene

$$|f_\epsilon(x)|^p \leq \int |f(y)|^p \phi_\epsilon(x-y) dy,$$

da cui integrando in x segue la tesi. In modo analogo si procede nei casi $p = 1$ e $p = +\infty$.

Theorem 2.12. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, allora

- Se f è continua, si ha che f_ϵ converge a f per $\epsilon \rightarrow 0$ uniformemente sui compatti $K \subset \mathbb{R}^n$;
- Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$ allora f_ϵ converge a f in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Sia f continua e consideriamo

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \int (f(x-z) - f(x)) \phi_\epsilon(z) dz,$$

poiché ϕ_ϵ è nulla per $|z| > \epsilon$, l'integrale è esteso a $B_\epsilon = \{x : |x| \leq \epsilon\}$. Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$, dal teorema di Cantor f è uniformemente continua in K e quindi per ogni $\tau > 0$ esiste σ_τ tale che $|f(x-z) - f(x)| < \tau$ quando $0 < |z| < \sigma_\tau$, allora basta considerare $\epsilon < \sigma_\tau$ e si ottiene

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| < \tau \int \phi_\epsilon(z) dz = \tau,$$

da cui segue la convergenza uniforme.

Supponiamo $f \in L^p$, dalla proprietà di densità, per ogni $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^\infty$ tale che $\|f - g\| < \tau$. Da altra parte, tenendo conto del fatto che $(f - g)_\epsilon = f_\epsilon - g_\epsilon$, dal teorema precedente segue

$$\|f - f_\epsilon\|_p \leq \|f - g_\epsilon\|_p + \|g - g_\epsilon\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\|f - g\|_p + \|g - g_\epsilon\|_p,$$

dal momento che g ha supporto compatto, g_ϵ ha supporto contenuto in $K_\epsilon = \{x : \text{dist}(x, K) \leq \epsilon\}$ e $K_\epsilon \subset K_1$, per $\epsilon < 1$. Dalla prima parte della dimostrazione g_ϵ converge uniformemente a g in K_1 quindi dal fatto che $\|g - g_\epsilon\|_p \leq |K_1|^{\frac{1}{p}} \sup_{x \in K_1} |g(x) - g_\epsilon(x)|$, segue la tesi.

Theorem 2.13. Sia $1 \leq p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ allora $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.

Proof. Supponiamo $f \in L^p$, dalla densità, per ogni $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^\infty$ tale che $\|f - g\| < \tau$. Da altra parte per ϵ sufficientemente piccolo risulta $\text{Supp } g_\epsilon \subset \Omega$ e poiché g_ϵ converge a g in L^p si ha $\|g - g_\epsilon\|_p \leq \tau$. La successione $(g_\epsilon) \subset C_0^\infty$ e allora

$$\|g_\epsilon - f\|_p \leq \|g_\epsilon - g\|_p + \|g - f\|_p \leq 2\tau,$$

da cui la tesi.

Siamo ora in grado di dare la dimostrazione del **Fondamentale del Calcolo delle Variazioni**.

Theorem 2.14. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega f(x) h(x) dx = 0 \quad \text{per ogni } h \in C_c^\infty(\Omega).$$

Allora $f = 0$ q.o. in Ω .

Proof. Assegnata $g \in L^\infty$ una funzione con supporto compatto contenuto in Ω proviamo che vale

$$\int_{\Omega} fg \, dx = 0.$$

Sia $g_\epsilon \in C_0^\infty$ e per ϵ sufficientemente piccolo risulta $\text{Supp } g_\epsilon \subset \Omega$. Dall'ipotesi segue quindi che

$$\int_{\Omega} g_\epsilon f \, dx = 0$$

Poiché g_ϵ converge a g in L^1 , esiste una sottosuccessione, che indichiamo ancora con g_ϵ , che converge a g quasi ovunque in Ω .

Inoltre, per il Lemma 2.11 si ha

$$|f(x)g_\epsilon(x)| \leq \|g_\epsilon\|_\infty |f(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty,$$

si può applicare il teorema della convergenza dominata e quindi dal passaggio al limite sotto il segno di integrale, ottenendo

$$\int_{\Omega} gf \, dx = 0.$$

Assegnato un compatto K , definiamo la seguente funzione in L^∞ :

$$g(x) = \begin{cases} \text{sign} f(x) & x \in K \\ 0 & x \in \Omega - K \end{cases}$$

da quanto provato in precedenza si ha per questa scelta di g :

$$\int_K |f| \, dx = 0,$$

e quindi $f(x) = 0$ quasi ovunque in K . Dall'arbitrarietà di K , segue $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω .

2.3 Derivazione dell'Equazione di Euler-Lagrange

Consideriamo il funzionale integrale

$$\int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (2.3.8)$$

con $f = f(x, s, z)$ di classe C^2 nelle sue variabili e studiamo il problema di minimo

$$(P) \quad m = \inf \{I(u) : u \in \Sigma\} \quad (2.3.9)$$

nella classe

$$\Sigma = \{u \in C^1([a, b]), \quad u(a) = A \quad u(b) = B\},$$

Vale il seguente teorema:

Theorem 2.15. Sia u_0 un minimo di (P) , $I(u_0) = m$. Allora u_0 è soluzione dell'equazione differenziale,

$$\frac{d}{dx} f_z(x, u(x), u'(x)) = f_s(x, u(x), u'(x)) \quad (2.3.10)$$

ed in particolare se $u_0 \in C^2([a, b])$ allora;

$$f_{zz}(x, u_0, u'_0)u''_0 + f_{zs}(x, u_0, u'_0)u'_0 + f_x(x, u_0, u'_0) = f_s(x, u_0, u'_0)$$

(2.15) è detta **Equazione di Euler-Lagrange** del funzionale integrale (2.3.8).

Proof. Nel seguito indicheremo $f_s(x, u_0(x), u'_0(x)) = f_s(x, u_0, u'_0)$ e $f_z(x, u_0(x), u'_0(x)) = f_z(x, u_0, u'_0)$. La variazione prima di I in u_0 è il funzionale nullo e quindi per ogni $h \in C^1([a, b])$ con $h(a) = h(b) = 0$.

$$\delta I(h) = \int_a^b [f_s(x, u'_0, u'_0)h + f_z(x, u'_0, u'_0)h']dx = 0. \quad (2.3.11)$$

Dal procedimento di integrazione per parti

$$[f_z(x, u_0, u'_0)h]_a^b - \int_a^b \frac{df_z(x, u_0, u'_0)}{dx} h dx + \int_a^b f_s(x, u_0, u'_0)h dx = 0$$

e quindi poiché $h(a) = h(b) = 0$ si ha

$$\int_a^b [f_s(x, u_0, u'_0) - \frac{df_z(x, u_0, u'_0)}{dx}]h dx = 0$$

La tesi segue dal Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni.

L'affermazione del teorema precedente si può invertire in particolari ipotesi su f .

Theorem 2.16. Sia $f = f(x, s, z)$ convessa nelle variabili (s, z) per ogni $x \in [a, b]$. Allora se u_0 è soluzione di (2.3.10) allora è anche soluzione del problema di minimo (P) .

Proof. Dalla convessità di f segue che per ogni altra $u \in \Sigma$:

$$f(x, u, u') \geq f(x, u_0, u'_0) + f_s(x, u_0, u'_0)(u - u_0) + f_z(x, u_0, u'_0)(u' - u'_0)$$

Integrando su $[a, b]$ e utilizzando il procedimento per parti, poiché $u = u_0$ in a e b , segue

$$I(u) \geq I(u_0) + \int_a^b [f_s(x, u_0, u'_0) - \frac{d}{dx} f_z(x, u_0, u'_0)](u - u_0).$$

Dal momento che u_0 è una soluzione di (2.3.10) segue che u_0 è minimo.

Vale poi il seguente teorema di unicità:

Theorem 2.17. *Sia $f = f(x, s, z)$ strettamente convessa nelle variabili (s, z) per ogni $x \in [a, b]$, allora se esiste il minimo di (P) è unico.*

Proof. Siano u_0 e v_0 due minimi $I(u_0) = I(v_0) = m$. Dalla stretta convessità di f segue

$$f(x, \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0, \frac{1}{2}u'_0 + \frac{1}{2}v'_0) < \frac{1}{2}f(x, u_0, u'_0) + \frac{1}{2}f(x, v_0, v'_0)$$

integrando su $[a, b]$ si ottiene

$$I(\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0) < \frac{1}{2}I(u_0) + \frac{1}{2}I(v_0) = m$$

Si giunge ad un assurdo visto che $(\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}v_0) \in \Sigma$.

Remark 2.18. È noto dalla teoria delle equazioni differenziali ordinaria che i problemi ai limiti, cioè con valori assegnati agli estremi dell'intervallo di definizione, non sempre hanno soluzione e la discussione delle varie condizioni di compatibilità può essere molto complicata. Data un'equazione differenziale si dice problema di Sturm-Liouville quello di determinare le soluzioni che soddisfano condizioni assegnate agli estremi. Questo tipo di problema non sempre ha soluzione unica. Infatti le due costanti che compaiono nell'integrale generale di un'equazione differenziale del secondo ordine non sono sempre sufficienti ad individuare la soluzione. Consideriamo ad esempio, un caso molto semplice:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.3.12)$$

questo problema ammette infinite soluzioni $y(x) = A \sin x$.

Il seguente problema

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2.3.13)$$

non ha soluzioni. Infatti supponiamo che y sia una soluzione

$$\int_0^\pi y'' \sin x dx + \int_0^\pi y \sin x dx - \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = 0$$

Integrando per parti e tenendo conto che $y(0) = y(\pi) = 0$ si giunge alla seguente contraddizione:

$$0 = \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

Passiamo al caso di integrali multipli. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f = f(x, s, z)$ con $(x, s, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, indichiamo

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx$$

dove $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e Du denota il vettore gradiente di u , $Du = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$.

Consideriamo il problema di minimo

$$(P_{\Omega, \varphi}) \quad \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx, \quad u \in C^1(\Omega, \varphi) \right\}$$

dove φ è una funzione definita e continua su tutto $\bar{\Omega}$ e $C^1(\Omega, \varphi)$ rappresenta la classe delle funzioni $u \in C^1(\Omega)$ tali che $u = \varphi$ su $\partial\Omega$.

Lo spazio delle variazioni ammissibili è lo spazio vettoriale $C_0^1(\Omega)$ quindi se u_0 è soluzione del problema $(P_{\Omega, \varphi})$, dal Teorema 2.5 si ha che la variazione prima di I in u_0 è il funzionale nullo su $C_0^1(\Omega)$:

$$\delta I(h) = \left[\frac{dI(y_0 + th)}{dt} \right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x, u_0 + th, Du_0 + tDh) dx \right]_{t=0} = 0$$

e dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, u_0, Du_0) h_{x_i} + f_s(x, u_0, Du_0) h dx = 0 \quad (2.3.14)$$

(2.3.14) è la forma debole dell'Equazione di Euler-Lagrange.

Supponiamo che f e u_0 siano di classe C^2 e Ω abbia una frontiera regolare tenendo conto del fatto che

$$\operatorname{div}(f_z h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{z_i} h) = \sum_{i=1}^n f_{z_i} h_{x_i} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (f_{z_i}) \right) h$$

(2.3.14) si può riscrivere nella forma:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f_{z_i}(x, u_0, Du_0) h) dx + \int_{\Omega} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i}(x, u_0, Du_0) + f_s(x, u_0, Du_0) \right] h dx = 0$$

Dal teorema della divergenza segue che :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f_{z_i}(x, u_0, Du_0) h) dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n f_{z_i}(x, u_0, Du_0) h \nu_i d\sigma = 0$$

dal momento che $h = 0$ su $\partial\Omega$ e quindi

$$\int_{\Omega} \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i}(x, u_0, Du_0) + f_s(x, u_0, Du_0) \right] h dx = 0$$

Dal Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni in più dimensioni, si ottiene la seguente forma forte dell'Equazione di Euler-Lagrange:

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i}(x, u_0, Du_0) + f_s(x, u_0, Du_0) = 0$$

- Integrale di Dirichlet:

$$D(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx$$

ed il problema di minimo nella classe di funzioni $u \in C^1(\Omega)$ con un valore assegnato su $\partial\Omega$. dal momento che $f(z) = |z|^2$ si ha $f_{z_i} = 2|z|\frac{z_i}{|z|}$ e quindi in questo caso l'equazione di Euler-Lagrange in forma debole è data da

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx = 0 \quad \text{per} \quad h \in C_0^1(\Omega)$$

e la sua forma forte è l'equazione di Laplace:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

- Integrale di Dirichlet generalizzato:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \int_{\Omega} g(x)u(x) dx$$

$g \in C^0(\Omega)$, l'equazione di Euler-Lagrange in forma debole è data da

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} g(x)h(x) dx = 0$$

e la relativa forma forte è data da $\Delta u = g$.

- Assegnata una funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ e consideriamo il funzionale:

$$I(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} |Du|^2 dx + \int_{\Omega} G(u) dx$$

L'equazione di Euler-Lagrange è data da

$$- \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} g(u)h dx = 0 \quad \text{per} \quad h \in C_0^1(\Omega)$$

e la forma forte è l'equazione di Poisson non lineare: $-\Delta u = g(u)$,

- Funzionale dell'area delle superfici cartesiane:

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} dx$$

L'equazione di Euler-Lagrange relativa al problema del minimo di I con assegnato valore al bordo di Ω in forma debole è data da

$$-\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{D_{x_i} u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} D_{x_i} h dx = 0$$

ed in forma forte

$$\sum_{i=1}^n D_{x_i} \left(\frac{D_{x_i} u}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

- Funzionali integrali definiti nella classe delle funzioni vettoriali:

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx, \quad u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$$

dove Du è la matrice Jacobiana di u ,

$$Du = \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x_i} \right), \quad \alpha = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, n$$

e $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$ di classe C^2 nelle sue variabili.

Considerato un problema di minimo nella classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, con assegnato valore al bordo, se u_0 è soluzione allora, per ogni $h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, procedendo come nel caso scalare, si ha:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} (f_{z_i^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) D_{x_i} h^{\alpha} + f_{s^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) h^{\alpha}) dx = 0 \quad (2.3.15)$$

e ragionando, come prima, attraverso il procedimento di integrazione per parti, si ottiene

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) + f_{s^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) \right) h^{\alpha} dx = 0 \quad (2.3.16)$$

Dal Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni segue la forma forte, che in questo caso è data dal seguente sistema di equazioni differenziali a derivate parziali

$$-\sum_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) - f_{s^{\alpha}}(x, u_0, Du_0) = 0$$

per ogni $\alpha = 1, \dots, N$.

Remark 2.19. Osserviamo che quando $f = f(z)$ ed è di classe C^2 , le funzioni lineari sono soluzioni dell'equazione di Euler-Lagrange:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} (f_{z_i^\alpha}(Du) D_{x_i} h^\alpha) = 0 \quad \text{per ogni} \quad h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (2.3.17)$$

Sia w_0 una funzione lineare in $\mathbb{R}^n$, poiché $Dw_0 = z_0 \in \mathbb{R}^{Nn}$ si ha:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(z_0) D_{x_i} h^\alpha = 0$$

che è senz'altro soddisfatta, essendo, per ogni i, α , $\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} D_{x_i} h^\alpha = 0$, dal momento che $h^\alpha = 0$, sul bordo di Ω .

Remark 2.20. Nel ricavare l'equazione di Euler-Lagrange abbiamo considerato problemi di Dirichlet, cioè classi di funzioni con valore assegnato sul bordo di Ω . Supponiamo di non avere questa condizione e quindi questa volta per studiare la variazione prima del funzionale non dobbiamo imporre che h sia a supporto compatto:

$$\delta I(h) = \left[\frac{dI(y_0 + th)}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \text{per ogni} \quad h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

e

$$\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) D_{x_i} h^\alpha + f_{s^\alpha}(x, u, Du_0) h^\alpha dx = 0 \quad (2.3.18)$$

e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\sum_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) - f_{s^\alpha}(x, u_0, Du_0) \right) h^\alpha dx \\ + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) \nu_i h^\alpha d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

dove ν_i indica la componente i -esima del versore normale esterna a $\partial\Omega$. Poiché l'ultima relazione deve valere in particolare per $h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, ne deduciamo che (2.3.15) continua a valere

$$\sum_{i,\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) D_{x_i} h^\alpha + f_{s^\alpha}(x, u_0, Du_0) h^\alpha = 0$$

allora per ogni $h \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ segue

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) \nu_i h^\alpha d\sigma = 0$$

e per ogni $\alpha = 1, \dots, N$

$$\sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, u_0, Du_0) \nu_i = 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (2.3.20)$$

Quindi si conclude che se anche non si assegna una condizione sul bordo la funzione u_0 deve soddisfare comunque le N condizioni (2.3.20) sulla frontiera di Ω . (2.3.20), che vengono chiamate **Condizioni naturali**.

A titolo d'esempio consideriamo il seguente funzionale di Fermat

$$I(u) = \int_a^b g(x, u(x)) \sqrt{1 + (u')^2} dx$$

con g continua e $g(x, s) \neq 0$, nella classe delle funzioni $u \in C^1([a, b])$ tali che $u(a) = A$ ma nessuna condizione è assegnata in b . La (2.3.20) in questo caso diventa:

$$f_{u'}(b, u_0(b), u'_0(b)) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(b, u_0(b)) \frac{u'_0(b)}{\sqrt{1 + (u'_0)^2}} = 0$$

e quindi $u'_0(b) = 0$. La funzione minimo u_0 ha la tangente in b ortogonale alla retta $x = b$.

2.4 Osservazioni sull'Equazione di Euler-Lagrange (I)

In generale non è facile risolvere l'Equazione di Euler-Lagrange, vi sono alcuni casi speciali in cui essa può essere ricondotta ad un'equazione del primo ordine e le soluzioni possono essere ottenute con metodi noti.

- Consideriamo funzionali con integranda $f = f(x, z)$ cioè

$$I(u) = \int_a^b f(x, u') dx$$

in questo caso l'Equazione di Euler-Lagrange ha la forma:

$$\frac{d}{dx} f_z(x, u'(x)) = 0 \Rightarrow f_z(x, u'(x)) = c$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine se si può esplicitare rispetto ad u' si ottiene $u' = g(x, c)$, da cui si ricava u' .

- Sia $f = f(z)$ allora l'Equazione di Euler-Lagrange è data da

$$f_z(u'(x)) = c$$

che implica u' costante, le soluzioni sono funzioni affini. Quando f è una funzione convessa:

$$f(z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda f(z_1) + (1 - \lambda)f(z_2)$$

per ogni coppia z_1, z_2 e $\lambda \in (0, 1)$, allora l'esistenza dei minimi si ricava utilizzando disuguaglianza di Jensen:

Proposition 2.21. *Sia $f = f(z)$ una funzione convessa e $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, allora*

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u(x)) dx$$

Proof. Per semplicità supponiamo che f sia derivabile, allora per la convessità:

$$f(u(x)) \geq f(\bar{z}) + f'(\bar{z})(u(x) - \bar{z})$$

Scegliamo $\bar{z} = \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy$

$$f(u(x)) \geq f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy\right) + f'(\bar{z}) \left(u(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy\right)$$

integrando su $[a, b]$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x)) dx &\geq f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy\right) (b-a) + \\ &+ f'(\bar{z}) \int_a^b u(x) dx - f'(\bar{z}) \int_a^b \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(y) dy\right) dx \end{aligned}$$

da cui segue la tesi.

Il problema di minimo

$$m = \inf \left\{ \int_a^b f(u'(x)) dx : u(a) = A, \quad u(b) = B \right\} \quad (2.4.21)$$

ha almeno una soluzione nello spazio delle funzioni continue e derivabili a tratti nell'intervallo $[a, b]$, infatti

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(u') dx \geq f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u'(y) dy\right) = f\left(\frac{B-A}{b-a}\right)$$

da cui segue che la funzione

$$u_0(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A$$

è minimo del problema.

Ad esempio Consideriamo il funzionale:

$$I(u) = \int_1^2 u'(x)(1 + x^2 u'(x)) dx$$

nella classe delle funzioni $u(1) = 3$ e $u(2) = 5$ > La funzione integranda non dipende da s e l'equazione di Euler-Lagrange ha la forma:

$$\frac{d}{dx}(1 + 2x^2 u'(x)) dx = 0 \Rightarrow 1 + 2x^2 u'(x) = C$$

allora

$$u' = \frac{C_1}{2x^2} \Rightarrow u = \frac{1 - C_1}{2x} + C_2$$

le estremali costituiscono una famiglia di iperboli. Con $C_1 = 9$ e $C_2 = 7$ si ha l'estremale $u = 7 - \frac{4}{x}$, che passa per i due punti assegnati.

- Se $f = f(x, s)$, non dipende da u' , allora l'equazione di Euler-Lagrange si riduce a $f_s(x, u(x)) = 0$, che non è un'equazione differenziale ed ha per soluzioni curve implicitamente definite dalla funzione f_s .
- Consideriamo il caso $f = f(s, z)$, l'equazione ha la forma

$$\frac{d}{dx}(f_z(u, u')) = f_s(u, u') \quad (2.4.22)$$

Limitiamoci a studiare le soluzioni non identicamente nulle, allora (2.4.22) è equivalente a

$$\frac{d}{dx}(u' f_z(u, u') - f(u, u')) = 0 \quad (2.4.23)$$

Infatti

$$\frac{d}{dx}(u' f_z - f) = u'' f_z + u' \frac{d}{dx} f_z - f_s u' - u'' f_z = u' \left(\frac{d}{dx} f_z - f_s \right)$$

. Un integrale primo di (2.4.23) è dato, con C costante reale da:

$$u' f_z(u, u') - f(u, u') = C \quad (2.4.24)$$

Quest'ultima equazione in alcuni casi può essere risolta.

Supponiamo ad esempio che:

$$f(s, z) = g(s) \sqrt{1 + z^2}$$

In questo caso (2.4.24) diventa:

$$\frac{u' g(u) u'}{\sqrt{1 + u'^2}} - g(u) \sqrt{1 + u'^2} = - \frac{g(u)}{\sqrt{1 + u'^2}} = C$$

da cui si ricava

$$g(u) = C\sqrt{1+u'^2} \Rightarrow \left(\frac{g(u)}{C}\right)^2 = 1+u'^2$$

e quindi

$$\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{g(u)}{C}\right)^2 - 1}} =_{\pm} (x + c_1)$$

il segno positivo o negativo deve essere scelto in accordo con il segno di u' .

Un funzionale di questa forma è quello relativo al problema della brachistocrona, che abbiamo descritto nel primo capitolo. Si tratta di minimizzare il funzionale:

$$I(u) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{2gu+v_0}} dx$$

nella classe delle funzioni continue con derivata prima continua e tali che $u(0) = 0$ e $u(x_1) = u_1$. In questo caso:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2gu+v_0}}$$

quindi, bisogna determinare le funzioni u tali che

$$\frac{1}{\sqrt{(1+u'^2)(2gu+v_0)}} = C$$

Poniamo

$$u'(x) = \cotg \varphi(x) \quad (2.4.25)$$

Si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{(1+u'^2)}} = \sqrt{2gu+v_0} \Rightarrow \frac{1}{C^2(1+(\cotg \varphi)^2)} = v_0^2 + 2gu$$

che implica

$$v_0^2 + 2gu = \frac{(\sin \varphi)^2}{C^2},$$

Risolvendo in u si ha

$$u = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{(\sin \varphi)^2}{2gC^2} = -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{1}{4gC^2}(1 - \cos 2\varphi),$$

da (2.4.25) segue allora

$$dx = \tg \varphi(x) = \tg \varphi(x) \frac{1}{2gC^2} (2 \sin \varphi(x) \cos \varphi(x)) =$$

$$= \frac{1}{2gC^2} (\sin \varphi(x))^2 = \frac{1}{2gC^2} (1 - \cos 2\varphi(x)),$$

integrando

$$x = \frac{1}{2gC^2} (\varphi(x) - \frac{1}{2} \sin 2\varphi(x)) + C_1 = \frac{1}{4gC^2} (2\varphi(x) - \sin 2\varphi(x)).$$

Ponendo $\theta = 2\varphi$ e $r = \frac{1}{2gC^2} > 0$, otteniamo

$$\begin{cases} x = C_1 + r(\theta - \sin \theta) \\ y = -\frac{v_0^2}{4g} + r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

Tali equazioni rappresentano una famiglia di cicloidi generate da un punto su una circonferenza di raggio r che rotola sulla retta $y = -\frac{v_0^2}{2g}$. imponendo il passaggio per i punti $(0, 0)$ e (x_1, u_1) , si ottiene il sistema nelle variabili $C, C_1, \theta_1, \theta_2$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + r(\theta_1 - \sin \theta_1) \\ 0 = -\frac{v_0^2}{4g} + r(1 - \cos \theta_1) \\ x_1 = C_1 + r(\theta_2 - \sin \theta_2) \\ u_1 = -\frac{v_0^2}{4g} + r(1 - \cos \theta_2) \end{cases}$$

Tale sistema ammette esattamente una soluzione che è l'arco di cicloide che passa per i punti del piani indicati. Pertanto esiste una ed una sola estrema del problema. Si può dimostrare, ma la dimostrazione è alquanto complessa, che tale estrema è anche un minimo del funzionale quando la velocità iniziale v_0 è positiva. Se $v_0 = 0$, l'arco di cicloide è ancora un minimo ma non nella classe delle funzioni C^1 essendo $u'(0) = +\infty$.

Consideriamo ad esempio il funzionale

$$I(u) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+u'^2}}{u} dx$$

nella classe delle funzioni tali che $u(a) = A$ e $u(b) = B >$ siamo nel caso $f = f(s, z)$, dalle relazioni precedenti le estremali del problema devono soddisfare

$$\int \frac{du}{\sqrt{(\frac{1}{Cu})^2 - 1}} =_{\pm}^+ (x + C_1)$$

da cui segue

$$(x + C_1)^2 + u^2 = C_2^2$$

quindi una famiglia di circonferenze con centro sull'asse delle ascisse. L'estrema del problema sarà quella che passa per i punti assegnati. Il problema ha un'unica soluzione, poiché per due punti qualsiasi del semipiano superiore passa una ed una sola semicirconferenza con centro sull'asse delle ascisse.

2.5 Osservazioni sull'Equazione di Euler-Lagrange (II)

L'Equazione di Euler-Lagrange è una condizione necessaria per un minimo di un funzionale integrale ma in generale non è una condizione sufficiente ma se f è convessa nelle variabili s, z , anche nel caso di integrali multipli, ogni soluzione dell'equazione di Euler-Lagrange è minimo. Consideriamo, per semplicità, il caso:

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, Du) dx,$$

con f convessa in z . Proviamo che se u_0 è soluzione della forma debole

$$\int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, Du_0) D_{x_i} h^\alpha dx = 0,$$

per ogni $h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, allora u_0 è un minimo di I tra tutte le funzioni che assumono il valore u_0 su $\partial\Omega$. Poiché ogni funzione di questa classe si può scrivere come $u_0 + h$ con $h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, dall'ipotesi di convessità segue che

$$I(u_0 + h) - I(u_0) \geq \int_{\Omega} \sum_{i,\alpha} f_{z_i^\alpha}(x, Du_0) (D_{x_i} h^\alpha) dx = 0.$$

In alcuni casi l'equazione di Euler-Lagrange può dare una completa risoluzione del problema di minimo. Infatti spesso l'esistenza della soluzione può essere chiara dal significato geometrico o fisico del problema in esame e se l'equazione differenziale ha un'unica soluzione, questa deve essere necessariamente un minimo.

Vale la pena osservare che non sempre un problema di minimo ammette soluzione. Diamo alcuni esempi.

Example 2.22. Sia

$$I(u) = \int_{-1}^1 (u')^2 (1 - u')^2 dx$$

e consideriamo il problema

$$m = \inf \{ I(u), \quad u \in C^1([-1, 1]) \quad u(-1) = 0 \quad u(1) = 1 \}. \quad (2.5.26)$$

L'equazione di Euler-Lagrange del problema è data da:

$$\frac{d}{dx} [2u' + 4u'^3 - 6u'^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2u' + 4u'^3 - 6u'^2 = C \quad \Rightarrow \quad u' = C_1$$

e quindi $\bar{u}(x) = \frac{x+1}{2}$ è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni agli estremi ma non è soluzione del problema (2.5.26).

Proveremo che $m = 0$ e poiché $I(\bar{u}) = \frac{1}{8}$, segue che $\bar{u}$ non è minimo e quindi il problema non ammette soluzioni.

Consideriamo la successione:

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < -\frac{1}{h} \\ \frac{h}{4}(x + \frac{1}{h})^2 & -\frac{1}{h} \leq x < \frac{1}{h} \\ x & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$

si ha $u_h(-1) = 0$ e $u_h(1) = 1$ ed inoltre

$$I(u_h) = \frac{1}{16} \int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} (1 + h^4 x^4 - 2h^2 x^2) dx = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{h} + \frac{2h^4}{5h^5} + \frac{4h^2}{3h^3} \right),$$

poiché $\lim_h I(u_h) = 0$ segue $m = 0$.

Tuttavia il funzionale I ammette minimo nella classe delle funzioni continue e regolari a tratti cioè che presentano un numero finito di discontinuità di prima specie nella derivata. In questa classe l'estremo inferiore è ancora uguale a 0, infatti basta considerare la successione:

$$u_h(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < -\frac{1}{h} \\ \frac{h}{2}(x + h) & -\frac{1}{h} \leq x < \frac{1}{h} \\ x & \frac{1}{h} < x \leq 1 \end{cases}$$

e si ha che $\lim_h I(u_h) = 0$. La funzione u_0 definita da

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

è tale che $I(u_0) = 0$ ed è quindi un minimo del problema (2.5.26).

Osserviamo che u_0 non è l'unico minimo infatti si possono costruire funzioni regolari a tratti che soddisfano i dati al bordo con $u' = 0$ oppure $u' = 1$.

Example 2.23. Consideriamo ora un funzionale integrale, con funzione integranda strettamente convessa, ma che non ammette soluzioni neanche nella classe delle funzioni C^1 a tratti. Definiamo

$$I(u) = \int_0^1 x(u')^2 dx$$

e consideriamo il problema

$$m = \inf \{ I(u), \quad u \in C^1([-1, 1]) \quad u(0) = 1 \quad u(1) = 0 \}. \quad (2.5.27)$$

L'equazione di Euler-Lagrange è data da

$$(xu')' = 0 \Rightarrow u'(x) = \frac{c}{x} \Rightarrow u(x) = c \log x + d$$

con c e d costanti reali.

Si vede subito che non esistono soluzioni di classe C^1 dell'equazione, con i valori assegnati agli estremi.

Proviamo che il problema (2.5.27) non ha soluzioni neppure nella classe delle funzioni regolari a tratti.

Consideriamo la successione (u_h) di funzioni regolari a tratti

$$u_h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{h} \\ -\frac{\log x}{\log h} & \frac{1}{h} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

È evidente che $u_n(0) = 1$ e $u_n(1) = 0$ ed inoltre

$$I(u_h) = \int_{\frac{1}{h}}^1 \frac{x}{(x \log h)^2} dx = \frac{1}{\log h} \Rightarrow \lim_n I(u_n) = 0$$

quindi l'estremo inferiore è 0.

La soluzione u_0 deve essere quindi tale che $I(u_0) = 0$, ma allora necessariamente $(u_0)' = 0 \Rightarrow u_0 = c$, con c costante reale quasi ovunque nell'intervallo $[0, 1]$ ma dalla continuità segue $u_0 = c$ in tutto $[0, 1]$ e le condizioni agli estremi non possono essere soddisfatte.

Metodi Diretti del Calcolo delle Variazioni

3.1 Principio di Dirichlet

Il teorema fondamentale dell'algebra di Gauss ha segnato l'inizio di un nuovo modo di affrontare i problemi matematici. Fino a quel momento infatti, gli studi delle equazioni algebriche cercavano di ottenere formule esplicite delle radici. Gauss invece provò l'esistenza di tali radici, senza preoccuparsi di calcolarne l'espressione. Per la prima volta si stabiliva l'esistenza di soluzioni e solo successivamente si affrontava la questione di determinare i procedimenti e le tecniche per ottenere l'espressione esplicita.

Agli inizi dell'Ottocento le due questioni si separano ed è proprio nello studio delle Equazioni Differenziali e del Calcolo delle Variazioni che si ottengono i risultati più interessanti, spesso suggeriti anche da considerazioni di natura fisica.

Di particolare importanza furono gli studi di Riemann, basati su alcune considerazioni che possiamo riassumere nel modo seguente:

Consideriamo una superficie formata da uno strato sottile ed uniforme di materiale conduttore di elettricità e supponiamo che in essa si generi una corrente stazionaria dovuta a batterie: il potenziale associato è una soluzione di un problema al contorno per un'equazione differenziale, che può essere dedotta da un problema di minimo: determinare tra tutti i possibili flussi del campo elettrico quello che produce una minima quantità di calore.

A Riemann si deve il merito di aver osservato che un problema differenziale poteva essere ricondotto alla ricerca di un minimo di un funzionale integrale legato all'equazione.

Il problema di determinare una funzione u , in un dominio Ω con un valore assegnato sulla frontiera di Ω :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1.1)$$

si può ricondurre al problema di determinare il minimo del seguente funzionale, detto di *Dirichlet*:

$$D(u, \Omega) = \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx,$$

nella classe delle ammissibili che assumono il valore g su $\partial\Omega$.

Riemann era convinto che visto $D(u, \Omega) \geq 0$, poiché il funzionale $D(u, \Omega)$ è inferiormente limitato ammetteva minimo e quindi era assicurata l'esistenza delle soluzioni del problema (3.1.1) e pose questo argomento alla base della sua teoria, che prende il nome di *Principio di Dirichlet*.

Si deve a Weierstrass nel 1869 la critica a tale principio, che fu formulato in modo esatto da Hilbert nel 1900.

Il Principio di Dirichlet nella sua formulazione originaria può essere enunciato nel modo seguente:

Consideriamo il problema di minimo per il funzionale di Dirichlet:

$$\inf \{D(u, \Omega), \quad u \in \mathcal{U}\} \quad (3.1.2)$$

nella classe $\mathcal{U}$ delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$ e regolari a tratti in Ω e tali che $u = g$ su $\partial\Omega$.

Il problema ammette una ed una sola soluzione $\bar{u} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, che è una funzione armonica e risolve il problema differenziale (3.1.1).

Il Principio di Dirichlet è conseguenza della teoria classica del Calcolo delle Variazioni, infatti abbiamo visto che $\Delta u = 0$ è l'equazione di Euler-Lagrange del funzionale di Dirichlet.

Tuttavia quest'osservazione non può da sola costituire la dimostrazione, infatti sebbene D sia inferiormente limitato nella classe delle funzioni ammissibili, non è detto che il valore minimo sia assunto, come può essere facilmente visto con alcuni esempi.

Example 3.1. Consideriamo

$$I(u) = \int_0^1 (u(x))^2 dx$$

nella classe $u \in C([0,1])$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$. Ovviamente I ha estremo inferiore uguale a 0 ma non esiste nessuna funzione nella classe delle funzioni ammissibili per cui $I(u) = 0$.

Example 3.2. Consideriamo

$$I(u) = \int_{-1}^1 x^4 (u')^2 dx$$

nella classe delle funzioni continue e derivabili a tratti tali che $u(-1) = -1$ e $u(1) = 1$. Si vede facilmente che la successione: $u_h(x) = -1$ nell'intervallo $[-1, -\frac{1}{h})$, $u_h(x) = hx$ nell'intervallo $[-\frac{1}{h}, \frac{1}{h})$ ed $u_h(x) = 1$ per $x \in [\frac{1}{h}, 1]$ è minimizzante. Dal momento che $I(u_h) = \frac{2}{5h^2}$, segue che l'estremo inferiore del problema è 0. Tuttavia nessuna funzione nello spazio delle funzioni ammissibile realizza $I(u) = 0$.

Per determinare i minimi del funzionale integrale bisogna trovare un metodo che non usi le condizioni necessarie contenute nell'equazione di Euler-Lagrange. Nascono così i Metodi Diretti che si basano sulla nozione di semicontinuità inferiore per successioni.

Definition 3.3. *Il funzionale I è sequenzialmente semicontinuo inferiormente per successioni rispetto alla topologia τ , se per ogni successione $(u_h) \subset \mathbf{U}$, convergente ad una funzione u_0 nella topologia τ , si ha*

$$I(u) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h).$$

Consideriamo il funzionale I definito in $\mathbf{U}$, dotato della topologia τ , vogliamo studiare il seguente problema

$$(P) \quad \inf \{I(u), \quad u \in \mathbf{U}\} = m. \quad (3.1.3)$$

Il procedimento dei Metodi Diretti consiste dei seguenti passi:

- (a) provare che l'estremo inferiore m di I in $\mathbf{U}$ è finito;
- (b) provare l'esistenza di una successione minimizzante di I in $\mathbf{U}$, cioè una successione $(u_h)_h$ tale che

$$m = \lim_{h \rightarrow \infty} I(u_h),$$

che converge o ammette una sottosuccessione convergente ad una funzione $u_0 \in \mathbf{U}$ nella topologia τ .

- (c) garantire la semicontinuità inferiore del funzionale I .

Quando queste condizioni sono soddisfatte, si ottiene

$$I(u_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h) = m.$$

e segue che u_0 è un minimo di I in $\mathbf{U}$. Sia $I : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale definito in U dotato della topologia τ .

Dato un funzionale I inferiormente limitato con estremo inferiore m nella classe di competizione è garantita l'esistenza di una successione minimizzante.

Tuttavia non è sempre detto che tale successione converga e quando converge non è detto che la funzione limite appartenga alla classe di competizione.

Anche per l'integrale di Dirichlet può sorgere questo tipo di difficoltà.

Example 3.4. Consideriamo $D(u)$ nel cerchio $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio 1:

$$\inf \{D(u, B(0, 1)), u = 0 \text{ su } \partial B_1\} \quad (3.1.4)$$

ovviamente $m = 0$ e la funzione $u(x) = 0$ in $B(0, 1)$ è l'unica soluzione di (3.1.4). È possibile costruire una successione minimizzante di (3.1.4) che non converge in senso classico alla funzione identicamente nulla.

Scriviamo $D(u, B(0, 1))$ in coordinate polari

$$D(u, B(0, 1)) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] r dr d\vartheta \quad (3.1.5)$$

e definiamo la successione

$$\begin{cases} u_h(r, \vartheta) = C_h \log \rho_h & \text{per } r < \rho_h^2 \\ u_h(r, \vartheta) = C_h \log \frac{r}{\rho_h} & \text{per } \rho_h^2 \leq r < \rho_h \\ u_h(r, \vartheta) = 0 & \text{per } \rho_h \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Si ha che

$$D(u_h, B(0, 1)) = 2\pi C_h^2 \int_{\rho_h^2}^{\rho_h} \frac{1}{r} dr = -2\pi C_h^2 \log \rho_h$$

È possibile scegliere ρ_h e C_h in modo tale che $\lim_{h \rightarrow \infty} D(u_h, B(0, 1)) = 0$, mentre la successione (u_h) non converge in senso classico alla funzione nulla. Infatti per $\rho_h = e^{-h}$ e $C_h = -h^{-\frac{2}{3}}$ si ha

$$D(u_h, B(0, 1)) = 2\pi(-h^{-\frac{4}{3}})(-h) = 2\pi h^{-\frac{1}{3}}$$

quindi u_h è una successione minimizzante tale che $u_h(0, 0) = -h^{-\frac{2}{3}}(-h) = h^{\frac{1}{3}}$, che tende all'infinito per $h \rightarrow +\infty$. La funzione limite di una successione minimizzante non sempre determina una soluzione del problema.

Da altra parte l'idea di studiare il problema variazionale per risolvere quello differenziale non sempre è corretta. Infatti si può verificare che il problema di minimo non ha soluzione mentre quello differenziale ha soluzioni. Un caso concreto è dato dal seguente esempio, dovuto ad Hadamard.

Example 3.5. Consideriamo $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ e su $\partial B(0, 1)$ definiamo la funzione continua $\bar{g} = \bar{g}(\vartheta)$ attraverso una serie di Fourier:

$$\bar{g}(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} (a_h \cos h\vartheta + b_h \sin h\vartheta)$$

non necessariamente convergente. È noto che la soluzione di $\Delta u = 0$ nel cerchio $B(0, \rho)$ di centro l'origine e raggio $0 < \rho < 1$ con $u = \bar{g}$ sul bordo, si può rappresentare attraverso la serie convergente:

$$\bar{u}(r, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} r^h (a_h \cos h\vartheta + b_h \sin h\vartheta) \quad (3.1.7)$$

e anche

$$D(\bar{u}, B(0, \rho)) = \pi \sum_{h=1}^{+\infty} (a_h^2 + b_h^2) h \rho^{2h}$$

quindi per ogni k

$$\pi \sum_{h=1}^k (a_h^2 + b_h^2) h \rho^{2h} = D(u, B_\rho) \leq \pi \sum_{h=1}^{+\infty} h (a_h^2 + b_h^2) = D(u, B_1)$$

facendo tendere $\rho \rightarrow 1$, segue

$$D(\bar{u}, B(0, 1)) = \pi \sum_{h=1}^{+\infty} h (a_h^2 + b_h^2) \quad (3.1.8)$$

ed è ben definito se e solo se la serie a secondo membro converge. È possibile costruire funzioni continue $\bar{g}$ per cui la serie in (3.1.8) diverge.

Definiamo $\bar{g}$ con i coefficienti dello sviluppo di Fourier della forma $a_h = 0$ e $b_h = h^{-2}$ per $h = k!$ altrimenti $b_h = 0$, si ottiene

$$\bar{g}(\vartheta) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k!\vartheta)}{k^2}$$

Consideriamo $\bar{u}$ dato dalla formula (3.1.7), il relativo funzionale di Dirichlet ha la forma

$$D(\bar{u}, B(0, 1)) = \pi \sum_{h=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^4} = +\infty$$

Il problema differenziale con questa scelta di dati è risolubile, ma non può essere ricondotto al problema variazionale, che invece non ammette soluzioni.

Possiamo concludere che non vi è completa equivalenza tra i due tipi di problemi.

Un modo per evitare questa difficoltà è quello di restringere la scelta possibile dei dati al bordo considerando dati g che sono la restrizione sul bordo di Ω di funzioni continue e regolari a tratti in Ω e tali che $D(g) < +\infty$. Con quest'ipotesi aggiuntive il Principio di Dirichlet è dimostrabile ma non per tutti i domini.

Example 3.6. Consideriamo il cerchio unitario privato dell'origine $\tilde{B}(0, 1)$ e definiamo la funzione $g(r) = 0$ per $r = 1$ e $g(r) = 1$ per $r = 0$, che risulta continua sulla frontiera di $\tilde{B}(0, 1)$. Il problema di minimo per l'integrale di Dirichlet in $\tilde{B}(0, 1)$

$$\inf \left\{ D(u, \tilde{B}(0, 1)), u = g \text{ su } \partial \tilde{B}(0, 1) \right\} \quad (3.1.9)$$

non ha soluzione. Si possono infatti costruire delle funzioni che prolungano il dato g su tutto il cerchio tali che il valore dell'integrale di Dirichlet sia arbitrariamente piccolo. Definiamo per $\delta > 0$ la funzione

$$\begin{cases} u_\delta(r, \vartheta) = 1 & \text{per } 0 \leq r \leq \delta^2 \\ u_\delta(r, \vartheta) = \frac{\log \frac{\delta}{r}}{\log \frac{1}{\delta}} & \text{per } \delta^2 \leq r \leq \delta \\ u_\delta(r, \vartheta) = 0 & \text{per } \delta \leq r \leq 1 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

Si ha che da (3.1.5)

$$m = D(u_\delta, \tilde{B}(0, 1)) = \frac{2\pi}{(\log \delta)^2} \int_{\delta^2}^{\delta} \frac{1}{r} dr = -\frac{2\pi}{\log \delta}$$

per $\delta \rightarrow 0$ segue che $m = 0$. L'eventuale soluzione deve soddisfare $D(u, \tilde{B}(0, 1)) = 0$ e riducendosi ad una costante non può assumere il valore g sulla frontiera.

Possiamo quindi concludere che per stabilire l'esatta formulazione del Principio di Dirichlet dobbiamo tener conto dei seguenti fatti:

- Funzionali inferiormente limitati non è detto che abbiano minimo;
- Le successioni minimizzanti possono non convergere al minimo;
- Il problema differenziale è risolubile mentre il problema di minimo non ha soluzione;
- Se il dominio di integrazione non è regolare il problema di minimo può non avere soluzione.

Formulazione precisa del Principio di Dirichlet

Siano dati un aperto Ω limitato, con frontiera regolare ed una funzione g continua in $\bar{\Omega}$, regolare a tratti in Ω e tale che $D(g, \Omega) < +\infty$. Consideriamo il problema

$$\inf \{ D(u, \Omega), u \in \mathcal{U}, u = g \text{ su } \partial \Omega \} \quad (3.1.11)$$

nella classe $\mathcal{U}$ delle funzioni continue in $\bar{\Omega}$, regolare a tratti. Questo problema ha un'unica soluzione $\bar{u}$ che è soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial \Omega \end{cases}$$

Il Metodo Diretto risulta quindi un *metodo indiretto* per la risoluzione delle equazioni differenziali che porta alla ricerca dei minimi di funzionali integrali. Inoltre i metodi diretti si sono rivelati di grande utilità per lo studio delle soluzioni ottenute come limiti di opportune successioni minimizzanti e nella realizzazione di procedure numeriche per calcolare i minimi, come ad esempio il Metodo di Ritz.

3.2 Spazi di Sobolev

Gli spazi di Sobolev sono particolari spazi di funzioni, la cui definizione fa uso della nozione di *derivata debole*, che si basa sulla formula di integrazione per parti.

3.2.1 Spazi di Sobolev in una dimensione

Sia I un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ di estremi a, b e $C_0^\infty(I)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili con continuità e con supporto contenuto in I .

Definition 3.7. Data $u \in L^1_{loc}(I)$ diremo che $v \in L^1_{loc}(I)$ è la *derivata debole* di u se

$$\int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b v \varphi dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(I). \quad (3.2.12)$$

Applicando il Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni ??, la funzione v è univocamente determinata.

In seguito indicheremo con u' la funzione v che soddisfa (3.2.12).

Se una funzione u ha la derivata usuale questa coincide con la derivata debole.

Osserviamo che la derivata quasi ovunque di una funzione non sempre coincide con la derivata debole. Sia $I = (0, 2)$ e definiamo

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \end{cases}$$

La funzione u è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1, \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Proviamo che v è anche la derivata debole di u , cioè

$$\int_0^2 u \varphi' dt = - \int_0^2 v \varphi dt,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$. Infatti

$$\begin{aligned} \int_0^2 u \varphi' dt &= \int_0^1 t \varphi' dt (3.2.12) + \int_0^2 \varphi' dt = \\ &= [t\varphi]_0^1 - \int_0^1 \varphi dt + [\varphi]_1^2 = - \int_0^1 \varphi dt = - \int_0^2 v \varphi dt. \end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione

$$u(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leq 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

La funzione u è quasi ovunque derivabile e la sua derivata quasi ovunque è ancora data da

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

In questo caso si vede che v non è la derivata debole di u , infatti per una generica $\varphi \in C_0^\infty(I)$, si ha

$$\int_0^2 u\varphi' dt = \int_0^1 t\varphi' dt + 2 \int_1^2 \varphi' dt = - \int_0^1 \varphi dt - \varphi(1) \neq - \int_0^2 v\varphi dt \quad (3.2.13)$$

Supponiamo che u abbia derivata debole e quindi esiste $\bar{v}$ che soddisfa (3.2.12) per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$.

Sia $(\varphi_k) \subset C_0^\infty(I)$ una successione tale che $0 \leq \varphi_k(t) \leq 1$, $\varphi_k(1) = 1$ e $\varphi_k(t) \rightarrow 0$ per ogni $t \neq 1$, allora

$$- \int_0^2 \bar{v}\varphi_k dt = \int_0^2 u\varphi_k' dt = - \int_0^1 \varphi_k dt - \varphi_k(1)$$

Dal teorema di passaggio al limite di Lebesgue segue:

$$1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi_k(1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\int_0^2 \bar{v}\varphi_k dt - \int_0^1 \varphi_k dt \right) = 0.$$

Definition 3.8. Per $1 \leq p \leq +\infty$, Denotiamo con $W^{1,p}(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $u \in L^p(I)$ con derivata debole in $L^p(I)$. Lo spazio $W^{1,p}(I)$ si chiama spazio di Sobolev sull'intervallo I .

Se $u \in C^1 \cap L^p$ e la derivata usuale $u' \in L^p$, dall'integrazione per parti u e u' soddisfano (3.2.12) e quindi in particolare $u \in W^{1,p}(I)$.

Lo spazio $W^{1,p}(I)$ è uno spazio vettoriale normato con la seguente norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p \quad (3.2.14)$$

Si dimostra che le funzioni di $W^{1,p}(I)$ sono in qualche senso le primitive delle funzioni di L^p . Vale infatti il seguente teorema:

Theorem 3.9. Sia $u \in W^{1,p}(I)$ allora esiste una funzione $\tilde{u} \in C^0$ tale che

$$u(x) = \tilde{u}(x) \quad \text{quasi ogni } x \in I,$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt. \quad (3.2.15)$$

Remark 3.10. Dal momento che le funzioni in $W^{1,p}(I)$ che sono quasi ovunque in I sono identificate grazie alla relazione di equivalenza, il teorema precedente afferma che ogni funzione $u \in W^{1,p}(I)$ ammette un unico rappresentante continuo cioè esiste una funzione continua che appartiene alla stessa classe di equivalenza di u . In seguito si fa riferimento al rappresentante continuo di u , che sarà denotato ancora con u , tuttavia va osservato che dire che esiste un rappresentante continuo è diverso dall'affermare che u è quasi ovunque continua.

3.2.2 Spazi di Sobolev in n dimensioni

Nel seguito Ω denota un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.11. Diremo che Ω è un aperto di classe C^m , se per ogni $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno U di x_0 ed un'applicazione biettiva $U \rightarrow B$, dove B è la sfera n -dimensionale di centro 0 e raggio 1, soddisfacente alle seguenti condizioni:

(1)

$$H \in C^m(\bar{B}) \quad e \quad H^{-1} \in C^m(\bar{U})$$

(2)

$$H(B_+) = U \cap \Omega \quad e \quad H(B_0) = U \cap \partial\Omega$$

dove $B_+ = \{x \in B : x_n > 0\}$ e $B_0 = \{x \in B : x_n = 0\}$.

Se $\Omega \in C^1$ allora per ogni x_0 esiste una unica normale esterna $\nu(x_0)$.

Vale il seguente teorema di Gauss-Green o della divergenza:

Theorem 3.12. Sia $\Omega \in C^1$ e $u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ allora

$$\int_{\Omega} D_{x_i} u dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_i d\sigma$$

In particolare se $\mathbf{F}(x) = (F_1, \dots, F_n)$ è un campo vettoriale definito in Ω di classe $C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ allora vale

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_{x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n F_i \nu_i d\sigma$$

Applicando la relazione precedente al prodotto uv , con $u, v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ si ha la **Formula di integrazione per parti**

$$\int_{\Omega} v D_{x_i} u dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} v D_{x_i} v dx$$

Se $u \in C^1(\Omega)$, allora per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi dx.$$

Diamo la definizione di derivata rispetto all' i -sima variabile:

Definition 3.13. Una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ha derivata prima debole se esistono n funzioni $(v_1, \dots, v_n)$ appartenenti a $L^1_{loc}(\Omega)$ tali che:

$$\int_{\Omega} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \forall i = 1, \dots, n$$

Utilizzando il Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si ha che se la derivata debole esiste è unica. $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ rappresenta il gradiente debole di u

Osserviamo che tutte le regole di derivazione usuali si generalizzano al caso delle derivate deboli. Le derivate di ordine superiore si definiscono in modo analogo.

Si definisce quindi lo spazio di Sobolev in Ω :

Definition 3.14. Per $1 \leq p \leq +\infty$, denotiamo con $W^{1,p}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $u \in L^p(\Omega)$ tale che le derivate parziali prime deboli u_{x_i} appartengono a $L^p(\Omega)$.

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è di Banach con la seguente norma:

$$\|u\|_{1,p} = \left\{ |u|^p + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |u_{x_i}|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty \quad (3.2.16)$$

$$\|u\|_{1,\infty} = \|u\|_{\infty} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{\infty} \quad (3.2.17)$$

Valgono le seguenti proprietà:

- Se $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile;
- Per $p = 2$, $W^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} v_{x_i} dx$$

Remark 3.15. Abbiamo visto che nel caso unidimensionale le funzioni $u \in W^{1,p}(I)$ sono di fatto le primitive delle funzioni $L^p(I)$ ed inoltre sono quasi ovunque uguale ad una funzione continua. Nel caso $n > 1$ una funzione può appartenere ad uno spazio di Sobolev ed essere discontinua e non limitata. Consideriamo $\Omega = B(0, 1)$ la sfera di centro 0 e raggio 1 di R^n e sia $u(x) = |x|^{-\alpha}$, with $\alpha > 0$. Osserviamo che u è regolare per $x \neq 0$

$$u_{x_i}(x) = -\frac{\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}},$$

e quindi per $x \neq 0$ si ha

$$|Du(x)| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Sia $\varphi \in C_0^\infty(B)$ e fissiamo $\epsilon > 0$, allora

$$\int_{B(0,1)-B(0,\epsilon)} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{B(0,1)-B(0,\epsilon)} u_{x_i} \varphi dx + \int_{\partial B(0,\epsilon)} u \varphi \nu_i d\sigma,$$

dove ν denota la normale esterna su $\partial B(0,\epsilon)$.

Da altra parte:

$$\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} u \varphi \nu_i d\sigma \right| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\partial B(0,\epsilon)} \epsilon^{-\alpha} d\sigma \leq C \epsilon^{n-1-\alpha},$$

quindi se $\alpha < n-1$ per $\epsilon \rightarrow 0$ segue:

$$\int_{B(0,1)} u \varphi_{x_i} dx = - \int_{B(0,1)} u_{x_i} \varphi dx,$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(B)$, quindi per $\alpha < n-1$ u_{x_i} è la derivata debole di u . Inoltre $Du(x)$ è sommabile L^p se e solo se $(\alpha+1)p < n$. Dal momento che $\frac{n-p}{p} < n-1$ si può concludere che $u \in W^{1,p}(B)$ se e solo se $0 < \alpha < \frac{n-p}{p}$. Inoltre $u \notin W^{1,p}(B)$ per ogni $p \geq n$.

Vale il seguente Teorema di Immersione compatta di Rellich:

Theorem 3.16. *Supponiamo che Ω sia un aperto regolare e $p > 1$, l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta: ogni successione limitata nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$ ha un'estratta che converge in $L^p(\Omega)$ rispetto alla convergenza forte.*

Diamo ora la definizione dello spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Definition 3.17. *La chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ rispetto alla norma (3.2.16) di $W^{1,p}(\Omega)$ si denota con $W_0^{1,p}(\Omega)$ ed è uno spazio di Banach munito della norma di $W^{1,p}(\Omega)$. In altre parole una funzione u appartiene a $W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se esiste una successione di funzioni $u_k \in C_0^\infty$ tale che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{1,p} = 0.$$

Le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ sono in qualche senso le funzioni che si annullano sulla frontiera di Ω , anche se è estremamente delicato precisare questa affermazione dal momento che le funzioni che appartengono agli spazi di Sobolev sono quasi ovunque definite. Osserviamo che se Ω è sufficientemente regolare si può dare un significato alla restrizione di u sulla frontiera di Ω facendo ricorso alla teoria delle tracce negli spazi di Sobolev.

Tuttavia si hanno i seguenti risultati che stabiliscono una caratterizzazione delle funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$

Theorem 3.18. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con supporto compatto contenuto in Ω . Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Theorem 3.19. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ e supponiamo che Ω abbia frontiera di classe C^1 , allora le seguenti proprietà sono equivalenti

- $u = 0$ su $\partial\Omega$,
- $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ definisce la chiusura di $C_0^1(\Omega)$ rispetto alla norma di $W^{1,p}(\Omega)$ ed è uno spazio di Banach munito della norma di $W^{1,p}(\Omega)$.

Theorem 3.20. Disuguaglianza di Poincaré: Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, esiste una costante $C = C(\Omega, p)$, dipendente da Ω e da p tale che

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C(\Omega, p) \int_{\Omega} |Du(x)|^2 dx \quad (3.2.18)$$

La disuguaglianza di Poicaré afferma che in $W_0^{1,p}(\Omega)$, la norma di $W^{1,p}$ è equivalente alla norma in L^p del solo gradiente.

3.2.3 Formulazione variazionale di problemi ellittici

Consideriamo Problema di Dirichlet omogeneo

Sia $\Omega \subset R^n$ aperto limitato e f una funzione assegnata: Consideriamo il seguente problema al contorno:

Determinare $u : \Omega \rightarrow R$ tale che

$$\begin{cases} -\Delta u + u = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u = f, & x \in \Omega \\ u = 0, & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.2.19)$$

Una soluzione classica è una funzione $u \in C^2(\bar{\Omega})$ che verifica (3.2.19) per ogni $x \in \Omega$.

Definition 3.21. Diremo che $\bar{u}$ è una soluzione debole di (3.2.19) se $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} D\bar{u}Dv dx + \int_{\Omega} \bar{u}v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.2.20)$$

Ogni soluzione classica u è anche una soluzione debole. Infatti, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, moltiplicando l'equazione in (3.2.19) per una funzione $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, integrando per parti:

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i x_i} \varphi = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i} \varphi_{x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} u_{x_i} \varphi \nu_i d\sigma,$$

e quindi poiché $\varphi = 0$ sulla frontiera di Ω , si ottiene:

$$\int_{\Omega} \Delta u \varphi dx = - \int_{\Omega} Du D\varphi dx,$$

e quindi vale (3.2.20) e per densità la stessa uguaglianza vale per ogni $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Theorem 3.22. *Per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un'unica $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ soluzione debole di (3.2.19).*

Proof. Tenendo conto del prodotto scalare in $W_0^{1,2}(\Omega)$

$$(u, v) = \int_{\Omega} Du Dv dx + \int_{\Omega} u v dx,$$

dal teorema di rappresentazione dei funzionali negli spazi di Hilbert, considerato il funzionale $F(v) = \int_{\Omega} f v dx$, si ha che esiste un'unica $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $(\bar{u}, v) = F(v)$.

3.2.4 Convergenza debole negli Spazi di Sobolev

In $W^{1,p}(\Omega)$ si definiscono due topologie differenti: la topologia *forte*, determinata dalla norma e la topologia *debole*, che definiremo attraverso la convergenza delle successioni di funzioni, anche se va osservato che non è una topologia metrizzabile.

Si dice che $(u_h) \subset W^{1,p}(\Omega)$ converge debolmente a u in $W^{1,p}(\Omega)$, $u_h \rightharpoonup u$, se per ogni $v \in L^q(\Omega)$ e per $i = 1, \dots, n$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha

$$\lim_h \int_{\Omega} u_h v dx = \int_{\Omega} u v dx \iff u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega);$$

$$\lim_h \int_{\Omega} (u_h)_{x_i} v dx = \int_{\Omega} u_{x_i} v dx \iff (u_h)_{x_i} \rightharpoonup u_{x_i} \text{ in } L^p(\Omega).$$

La convergenza debole e la topologia forte in $W^{1,p}(\Omega)$ sono legate dalla seguente proprietà, che generalizza il teorema di Bolzano-Weierstrass valido negli spazi a dimensione finita:

Theorem 3.23. *Data (u_h) una successione di elementi di $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, che converge nella topologia debole in $W^{1,p}(\Omega)$ allora la successione è limitata nella norma di $W^{1,p}(\Omega)$: esiste $M > 0$ tale che*

$$\|u_h\|_{1,p} \leq M, \quad h \in N$$

Theorem 3.24. *Data (u_h) una successione di elementi di $W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, tale che $\|u_h\|_{1,p} \leq M$, allora esiste un'estratta che converge nella topologia debole in $W^{1,p}(\Omega)$ a una funzione u .*

3.3 Applicazione dei Metodi Diretti

3.3.1 Integrale di Dirichlet: Caso Modello

Diamo la formulazione variazionale del Principio di Dirichlet nello spazio di Sobolev $W_0^{1,p}$, che corrisponde al caso di dato al bordo $g = 0$. Assegnata una funzione $f \in L^2(\Omega)$, consideriamo il problema di minimo per il funzionale di Dirichlet *perturbato*

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) \right\} \quad (3.3.21)$$

Theorem 3.25. *Sia Ω un aperto con frontiera regolare, il problema (3.3.21) ha un'unica soluzione.*

Proof. Sia $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, dalla disuguaglianza di Holder per le funzioni di $L^2(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} f w dx \geq -\|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ dalla disuguaglianza (3.2.18) segue

$$\|f\|_{L^2} \|w\|_{L^2} \leq \varepsilon^2 \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|_{L^2}^2 \leq C \varepsilon^2 \|Dw\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|_{L^2}^2$$

si ha

$$\begin{aligned} I(w) &\geq \int_{\Omega} |Dw|^2 dx - C \varepsilon^2 \int_{\Omega} |Du|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} |f|^2 dx \\ &\geq (1 - C \varepsilon^2) \int_{\Omega} |Dw|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} |f|^2 dx \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

scegliendo ε sufficientemente piccolo, $(1 - C \varepsilon^2) > 0$, segue

$$I(w) \geq -\bar{C} \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

quindi I è inferiormente limitato in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Sia (u_h) una successione minimizzante: $\lim_{h \rightarrow +\infty} I(u_h) = m$, poichè

$$I(u_h) \geq (1 - C \varepsilon^2) \int_{\Omega} |Du_h|^2 dx - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega} |f|^2 dx$$

segue che (Du_h) è una successione limitata nella norma di L^2 e ancora per la disuguaglianza di Poincaré (3.2.18) anche nella norma di $W_0^{1,2}(\Omega)$. Per il Teorema 3.24 esiste un'estratta, che denoteremo ancora con (u_h) , che converge nella topologia debole di $W_0^{1,2}(\Omega)$ ad $\bar{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Si ha poi che (u_h) converge ad u nella topologia forte della norma di L^2 , per il teorema di immersione di Rellich 3.16. Proviamo che

$$\int_{\Omega} |D\bar{u}|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_h|^2 dx \quad (3.3.23)$$

La funzione $g(z) = |z|^2$ è convessa in $z \in R^n$ e quindi si ha

$$g(z) - g(\bar{z}) \geq \sum_{i=1}^n g_{z_i}(\bar{z})(z_i - \bar{z}_i)$$

$$g(Du_h) - g(D\bar{u}) \geq \sum_{i=1}^n g_{z_i}(D_{x_i}\bar{u})(D_{x_i}u_h - D_{x_i}\bar{u})dx \quad (3.3.24)$$

Poiché $g_{z_i} = 2z_i$ si ha

$$|Du_h|^2 - |D\bar{u}|^2 \geq \sum_{i=1}^n (D_{x_i}\bar{u})(D_{x_i}u_h - D_{x_i}\bar{u})$$

Integrando su Ω

$$\int_{\Omega} |Du_h|^2 dx \geq \int_{\Omega} |D\bar{u}|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (D_{x_i}\bar{u})(D_{x_i}u_h - D_{x_i}\bar{u})dx$$

Dal momento che $D\bar{u} \in L^2(\Omega)$ e $D_{x_i}u_h - D_{x_i}\bar{u}$ tende a 0 nella topologia debole di $L^2(\Omega)$ l'ultimo integrale i tende a 0.

La relazione (3.3.23) dice che $\int_{\Omega} |Du|^2$ è un funzionale inferiormente semicontinuo per successioni rispetto alla convergenza debole di $W_0^{1,2}(\Omega)$. Da altra parte

$$\left| \int_{\Omega} f(u_h - \bar{u})dx \right| \leq \int_{\Omega} |f|(u_h - \bar{u})dx \leq \|u_h - \bar{u}\|_{L^2} \|f\|_{L^2}$$

e poiché (u_h) converge a $\bar{u}$ nella convergenza forte di $L^2(\Omega)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f u_h dx = \int_{\Omega} f \bar{u} dx,$$

quindi

$$I(\bar{u}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(u_h)$$

Proviamo che $\bar{u}$ è l'unica soluzione del problema. Supponiamo che esista un'altra soluzione $\bar{v}$ tale che $I(\bar{u}) = I(\bar{v}) = m$. Definiamo la funzione $\bar{w} = \frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$, dalla stretta convessità di $f(z) = |z|^2$ e dal fatto che $\int_{\Omega} f u dx$ è lineare, segue

$$m \leq I(\bar{w}) < \frac{1}{2}I(\bar{u}) + \frac{1}{2}I(\bar{v}) = m$$

che implica che anche $\bar{w}$ è minimo e che

$$\frac{1}{2}|\bar{D}u|^2 + \frac{1}{2}|\bar{D}v|^2 = |\bar{D}w|^2 = \left| \frac{1}{2}\bar{D}u + \frac{1}{2}\bar{D}v \right|^2$$

da cui $D\bar{u} = D\bar{v}$ quasi ovunque in Ω e quindi $\bar{u} - \bar{v}$ è costante e poiché $\bar{u} - \bar{v} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, segue che $\bar{u} - \bar{v} = 0$ quasi ovunque in Ω .

In modo analogo si può dimostrare il caso con dato al bordo non omogeneo:

Theorem 3.26. *Sia $\Omega \in R^n$ un aperto limitato con frontiera Lipschitziana e $u_0 \in W^{1,2}(\Omega)$, $I(u_0) < \infty$. Il problema:*

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} |Du|^2 dx, \quad u \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega) \right\}$$

ammette una ed una sola soluzione.

Proof. Il procedimento è analogo al precedente: si prova che esiste una successione minimizzante $u_h \in u_0 + W_0^{1,2}(\Omega)$ limitata in norma. Infatti

$$\|Du_h\|_{L^2} \leq m + 1$$

e dalla disuguaglianza di Poincaré applicata a $u - u_0 \in W_0^{1,2}$

$$\|u_h\|_{L^2} \leq \|u_h - u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2} \leq C \|Du_h - Du_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^2}$$

quindi

$$\|u_h\|_{W^{1,2}} \leq C$$

con C dipendente dalla norma $W^{1,2}$ di u_0 .

Il resto della dimostrazione segue come nel teorema precedente.

3.3.2 Caso Generale

Consideriamo il problema:

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx, \quad u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} \quad (3.3.25)$$

Vale il seguente teorema:

Theorem 3.27. *Sia*

$$f \in C^1(\Omega \times R \times R^n), \quad f \text{ convessa in } (s, z). \quad (3.3.26)$$

Inoltre

$$f(x, s, z) \geq \alpha(|z|^p - 1), \quad \alpha > 0, \quad p > 1; \quad (3.3.27)$$

$$|f_s(x, s, z)| \leq \beta(1 + |z|^{p-1} + |s|^{p-1}); \quad (3.3.28)$$

$$|f_z(x, s, z)| \leq \beta(1 + |z|^{p-1} + |s|^{p-1}). \quad (3.3.29)$$

allora (3.3.25) ammette una soluzione.

Inoltre se f è strettamente convessa in (s, z) allora il minimo è unico.

Proof. La dimostrazione segue utilizzando il procedimento dei Metodi Diretti, provando la semicontinuità del funzionale I e la compattezza delle successioni minimizzanti nella topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$.

Sia (u_k) una successione debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$, proviamo che:

$$\liminf_k \int_{\Omega} f(x, u_k, Du_k) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx \quad (3.3.30)$$

dalla convessità di f in s, z segue che :

$$f(x, u_k, Du_k) - f(x, u, Du) \geq f_s(x, u, Du)(u_k - u) + \sum_{i=1, \dots, n} f_{z_i}(x, u, Du)((u_k)_{x_i} - u_{x_i}) \quad (3.3.31)$$

Osserviamo che da (3.3.28) e (3.3.29) segue che $f_s(x, u, Du) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_s(x, u, Du)|^{\frac{p}{p-1}} &\leq \beta^{\frac{p}{p-1}} \int_{\Omega} (1 + |u|^{p-1} + |Du|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \leq \\ &\leq \beta^{\frac{p}{p-1}} (1 + \|u\|_{W^{1,p}}^p) < \infty \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che $f_{z_i}(x, u, Du) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n$. Integrando su Ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u_k, Du_k) dx - \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx &\geq \\ \int_{\Omega} f_s(x, u, Du)(u - u_k) dx + \sum_{i=1, \dots, n} \int_{\Omega} f_{z_i}(x, u, Du)((u_k)_{x_i} - u_{x_i}) dx \end{aligned}$$

Poiché $u_k - u$ converge debolmente a 0, passando al limite su k segue che :

$$\lim_k \int_{\Omega} f_s(x, u, Du)(u - u_k) dx + \sum_{i=1, \dots, n} \int_{\Omega} f_{z_i}(x, u, Du)((u_k)_{x_i} - u_{x_i}) dx = 0$$

da cui segue (3.3.30).

Sia ora $u_k - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ una successione minimizzante il problema:

$$\lim_k I(u_k) = m.$$

dal fatto che $I(u_0) < \infty$ segue che $m < \infty$.

Dall' ipotesi (3.3.27) segue che:

$$\int_{\Omega} f(x, u_k, Du_k) dx \geq \alpha \int_{\Omega} |Du_k|^p - \alpha$$

quindi esiste k_0 tale che per $k \geq k_0$

$$\int_{\Omega} |Du_k|^p \leq m + 1$$

Proviamo che le norme di u_k sono limitate in $W^{1,p}(\Omega)$. Si ha:

$$\|u_k\|_{W^{1,p}}^p \leq \int_{\Omega} |u_k|^p + \int_{\Omega} |Du_k|^p \leq \int_{\Omega} |u_k - u_0|^p + \int_{\Omega} |u_0|^p + \int_{\Omega} |Du_k|^p$$

Dalla disuguaglianza di Poincaré segue che:

$$\|u_k\|_{W^{1,p}}^p \leq c(n, p, \Omega) \int_{\Omega} |Du_k - u_0|^p + \int_{\Omega} |u_0|^p + \int_{\Omega} |Du_k|^p \leq C + \|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p$$

Poiché $W^{1,p}$ con $p > 1$ si ha che u_k ha un estratta che converge a $\bar{u}$ nella topologia debole di $W^{1,p}$ e $\bar{u} - u_0 \in W_0^{1,p}$: dalla semicontinuità del funzionale si ha:

$$m = \liminf_k I(u_k) \geq I(\bar{u}) \geq m$$

quindi $\bar{u}$ è un minimo del problema. Procedendo come nel caso dell'integrale di Dirichlet si prova che se f è strettamente convessa il minimo è unico.

La convessità di f rispetto l'ultima variabile è un condizone sufficiente per la semicontinuità del funzionale I . Vale infatti

Theorem 3.28. *Sia:*

- $f = f(x, s, \cdot) \in C^1$ convessa nella variabile z per ogni (x, s)
- $f = f(x, s, z) > 0$

allora per ogni $q \leq 1$ il funzionale:

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx$$

è inferiormente semicontinuo rispetto alla convergenza debole di $W^{1,p}(\Omega)$.

Proof. Sia (u_k) una successione che converge ad una funzione u nella topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$ e sia

$$0 < L = \liminf_k I(u_k).$$

passando ad una sottosuccessione si ha

$$L = \lim_k I(u_k).$$

Dobbiamo provare che

$$I(\bar{u}) \leq L,$$

Dal fatto che (u_k) converge debolmente segue che

$$\sup_k \|u_k\| < \infty$$

Inoltre dal teorema di Rellich segue che (u_k) converge a u nella topologia forte di L^p .

Per il teorema di Egorov si ha per ogni ϵ esiste un insieme E_ϵ con la proprietà che

$$|\Omega - E_\epsilon| \leq \epsilon$$

tale che $u_k \rightarrow u$ uniformemente in E_ϵ .

Poniamo

$$F_\epsilon = \left\{ x \in \Omega : |u(x)| + |Du(x)| < \frac{1}{\epsilon} \right\}$$

si ha

$$|\Omega - F_\epsilon| \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

e anche

$$G_\epsilon = E_\epsilon \cap F_\epsilon \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Calcoliamo, dalla convessità di f in z

$$I(u_k) \geq \int_{G_\epsilon} f(x, u_k, Du_k) dx \geq$$

$$\int_{G_\epsilon} f(x, u_k, Du) dx + \int_{G_\epsilon} f_z(x, u_k, Du)(Du_k - Du) dx$$

da cui

$$\begin{aligned} I(u_k, \Omega) &\geq \int_{G_\epsilon} f(x, u_k, Du) dx + \\ &+ \int_{G_\epsilon} (f_z(x, u_k, Du) - f_z(x, u, Du)(Du_k - Du)) dx \\ &+ \int_{G_\epsilon} f_z(x, u, Du)(Du_k - Du) dx \end{aligned}$$

Dalla convergenza uniforme di u_k in E_ϵ segue che

$$\lim_k \int_{G_\epsilon} f(x, u_k, Du) dx = \int_{G_\epsilon} f(x, u, Du) dx$$

Inoltre $f_z(x, u_k, Du)$ converge uniformemente in G_ϵ a $f_z(x, u, Du)$ e tenendo conto del fatto che Du_k converge nelle topologia debole di $L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_k \int_{G_\epsilon} (f_z(x, u_k, Du) - f_z(x, u, Du)(Du_k - Du)) dx + \\ + \int_{G_\epsilon} f_z(x, u, Du)(Du_k - Du) dx = 0 \end{aligned}$$

Segue quindi che per ogni ϵ

$$L = \lim_k I(u_k) \geq \int_{G_\epsilon} f(x, u, Du) dx$$

quindi dal momento che per $\epsilon \rightarrow 0$ la misura di $G_\epsilon \rightarrow |\Omega|$ si ha

$$L = \lim_k I(u_k) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx$$

Enunciamo il teorema che generalizza il Teorema precedente per l'esistenza dei minimi.

Theorem 3.29. *Consideriamo il problema di minimo*

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx, \quad u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} \quad (3.3.32)$$

e sia

- Ω è un aperto limitato con frontiera regolare;
- $f = f(x, s, \cdot)$ convessa nella variabile z per ogni (x, s) :
- Esiste $1 \leq q < p$ e $\alpha > 0$ tale che:

$$f(x, s, z) \geq \alpha(|z|^p - |s^q - 1|)$$

- $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $I(u_0) < \infty$.

allora il problema ha un minimo $\bar{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega)$. Inoltre se f è strettamente convessa in z allora il minimo è unico.

Le ipotesi del teorema precedente sono ottimali, meno l'ipotesi di continuità delle funzione integranda f .

Si può infatti supporre che f sia una funzione di Caratheodory: $f = f(\cdot, s, z)$ misurabile per ogni (s, z) e $f = f(x, \cdot, \cdot)$ continua per quasi ogni $x \in \Omega$

3.3.3 Condizione sufficiente per la semicontinuità

La convessità di f rispetto l'ultima variabile è in un certo senso anche una condizione sufficiente per la semicontinuità del funzionale I .

Diamo la dimostrazione nel caso unidimensionale, dovuta a Tonelli.

Theorem 3.30. *Consideriamo il funzionale in $[a, b] \subset \mathbb{R}$:*

$$I(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (3.3.33)$$

Se I è semicontinuo nella topologia della convergenza uniforme, allora $f = f(x, s, \cdot)$ è convessa nella variabile z .

Proof. Per semplicità di esposizione fissiamo $(\bar{x}\bar{u}) \in [a, b] \times R$ e $f(z) = f(\bar{x}_0\bar{u}, z)$, dobbiamo provare che per $\lambda \in (0, 1)$ e $z_1, z_2 \in R$ vale:

$$f((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2) \leq (1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2) \quad (3.3.34)$$

Sia $z_0 = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2$ e definiamo:

$$u_0(x) = c_0 + z_0(x - (a+b)) \quad (3.3.35)$$

segue che

$$I(u_0) = f((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2)(b-a) \quad (3.3.36)$$

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali:

$$a < \alpha_0^n < \alpha_1^n < \alpha_2^n < \dots < \alpha_n^n = b, \quad \text{con} \quad \alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n = \frac{b-a}{n}$$

Definiamo in $[\alpha_{i-1}^n, \alpha_i^n]$ la funzione:

$$u_i^n(x) = \begin{cases} \text{retta di pendenza } z_1 & \alpha_{i-1}^n \leq x < \lambda\alpha_{i-1}^n + (1-\lambda)\alpha_i^n \\ \text{retta di pendenza } z_2 & \lambda\alpha_{i-1}^n + (1-\lambda)\alpha_i^n < x \leq \alpha_i^n \end{cases}$$

Raccordata nei punti α_{i-1}^n e α_i^n con i valori che assume u_0 .

Sia

$$u_n(x) = u_i^n(x), \quad \text{in} \quad [\alpha_{i-1}^n, \alpha_i^n]$$

e calcoliamo il valore del funzionale I in u_n

$$I(u_n) = \sum_{i=1, \dots, n} \int_{\alpha_{i-1}^n}^{\alpha_i^n} f(u_n') dx = \sum_{i=1, \dots, n} [(1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)] (\alpha_i^n - \alpha_{i-1}^n) \quad (3.3.37)$$

e quindi

$$I(u_n) = [(1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)] (b-a) \quad (3.3.38)$$

Proviamo che u_n converge uniformemente a u_0 e quindi dalla semicontinuità segue che :

$$f((1-\lambda)z_1 + \lambda z_2)(b-a) = I(u_0) \leq \lim_n I(u_n) = [(1-\lambda)f(z_1) + \lambda f(z_2)] (b-a).$$

Per ogni $x \in [a, b]$ e n, i tale che $x \in [\alpha_{i-1}^n, \alpha_i^n]$ si ha

$$u^n(\alpha_i^n) = u_0(\alpha_i^n)$$

e dal momento che u_n u_0 hanno derivate limitate da una costante c , segue

$$\begin{aligned} |u_n(x) - u_0(x)| &\leq |u_n(x) - u_n(\alpha_i^n)| + |u_n(\alpha_i^n) - u_0(\alpha_i^n)| + |u_0(\alpha_i^n) - u_0(x)| \\ &\leq c|\alpha_i^n - x| \leq c \frac{(b-a)}{n} \end{aligned}$$

la successione u_n converge quindi uniformemente a u_0 .

Remark 3.31. Osserviamo che nel caso del funzionale delle superfici minime $f(z) = \sqrt{1+z^2}$ il procedimento del teorema di esistenza non è applicabile, infatti la crescita è con $p = 1$ in $W^{1,1}(\Omega)$ non vale che le successioni limitate in norma convergono nella topologia debole.

Consideriamo il seguente problema di tipo superfici minime ($p = 1$):

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_0^1 \sqrt{u^2 + u'^2} dx, \quad u \in W^{1,1}(0,1), \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 1 \right\}$$

Si vede facilmente che $m > 1$ infatti

$$I(u) \geq \int_0^1 |u'| dx > \int_0^1 u' dx = u(1) - u(0) = 1$$

Costruiamo una successione minimizzante $u_k \in W^{1,1}(0,1)$ tale che $\lim_k I(u_k) = 1$. Definiamo:

$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 - \frac{1}{k} \\ 1 + k(x-1) & 1 - \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}$$

Si vede che

$$1 \leq I(u_k) = \int_{1-\frac{1}{k}}^1 \sqrt{k^2 + (1+k(x-1))^2} dx \leq \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} \rightarrow 1$$

Sia $\bar{u}$ un minimo si ha

$$1 = I(\bar{u}) = \int_0^1 \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{u}'^2} dx > \int_0^1 \bar{u}' dx = 1$$

quindi non esistono $u \in W^{1,1}(0,1)$ con $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$ tali che $I(u) = 1$ e il problema non ammette soluzioni.

Remark 3.32. Osserviamo che se f non è convessa in z il problema di minimo può non avere soluzioni.

Consideriamo infatti il seguente problema, noto come esempio di Bolza:

$$m = \inf \left\{ I(u) = \int_0^1 [(u'^2 - 1)^2 + u^4] dx, \quad u \in W_0^{1,4}(0,1) \right\}$$

proviamo che $m = 0$. Ovviamente $I(u) \geq 0$, costruiamo una successione $u_k \in W_0^{1,4}(0,1)$ tale che $\lim_k I(u_k) = 0$. Per $k \geq 2$ definiamo per $0 \leq h \leq k-1$ la successione:

$$u_k(x) = \begin{cases} x - \frac{h}{k} & \frac{2h}{2k} \leq x < \frac{2h+1}{2k} \\ -x + \frac{h+1}{k} & \frac{2h+1}{k} < x \leq \frac{2h+2}{2k} \end{cases}$$

per costruzione $|u'_k| = 1$ e $|u_k| \leq \frac{1}{2k}$, quindi

$$0 \leq I(u_k) \leq \frac{1}{(2k)^4} \Rightarrow \lim_k I(u_k) = 0.$$

Supponiamo che $\bar{u}$ sia il minimo del problema allora $I(\bar{u}) = 0$, deve essere $|\bar{u}'| = 1$ e $|\bar{u}| = 0$ quasi ovunque in $[0, 1]$. dal momento che $\bar{u}$ appartiene allo spazio di Sobolev $W_0^{1,4}(0, 1)$ è continua si arriva all'assurdo che $\bar{u} = 0$ e $|\bar{u}'| = 1$.

3.4 Risultato di regolarità

In questa sezione stabiliamo un risultato di regolarità per un'equazione non lineare utilizzando le proprietà degli spazi di Sobolev ed in particolare le seguenti proprietà dei rapporti incrementali delle funzioni che appartengono a spazi di Sobolev.

Theorem 3.33. *Sia $1 < p \leq +\infty$ e $u \in L^p(I)$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) $u \in W^{1,p}(I)$;
- (ii) *Esiste c tale che per ogni $I_0, \bar{I}_0 \subset I$ e $h > 0$ con $|h| < \text{dist}(I_0, (-I))$, dove $(-I)$ denota l'insieme complementare di I si ha*

$$\left(\int_{I_0} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u'\|_p |h|, \quad 1 < p < +\infty,$$

$$|u(x+h) - u(x)| \leq \|u'\|_\infty |h|, \quad x \in I_0 \quad p = +\infty.$$

Remark 3.34. La terza condizione permette di identificare $W^{1,\infty}$ con la classe delle funzioni Lipschitziane $C^{0,1}$ nel caso I sia un intervallo aperto e limitato. Infatti vale

$$u \in W^{1,\infty} \implies |u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty |x - y|.$$

Tuttavia poiché gli elementi di $W^{1,\infty}$ sono definite quasi ovunque, il teorema afferma che esiste un rappresentante Lipschitziano.

Remark 3.35. Spazi di Sobolev $W^{2,p}$. Osserviamo che attraverso una naturale estensione della precedente definizione di spazio di Sobolev, si definisce lo spazio $W^{2,p}(I)$ delle funzioni di classe L^p con derivata prima e seconda debole in L^p . $W^{2,p}(I)$ è uno spazio di Banach con la norma:

$$\|u\|_{2,p} = (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p + \|u''\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Theorem 3.36. *Data la seguente equazione differenziale in un intervallo aperto (a, b) di $\mathbb{R}$:*

$$\frac{d}{dx}a(x, u(x), u'(x)) = b(x, u(x), u'(x)) \quad (3.4.39)$$

con $a(x, s, z), b(x, s, z)$ funzioni di classe $C^\infty((a, b) \times R \times R)$ soddisfacenti le seguenti condizioni di crescita:

- (H_1) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni (x, s, z) si ha:

$$|a(x, s, z)| \leq \gamma(1 + |z|^p),$$

$$|b(x, s, z)| \leq \gamma(1 + |z|^p).$$

- (H_2) Uniformemente rispetto a (x, s) :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} a(x, s, z) = +\infty.$$

- (H_3) Esiste $\alpha > 0$ tale che per ogni (x, s, z) si ha:

$$a_z(x, s, z) \geq \alpha > 0.$$

Sia $u \in W^{1,p}((a, b))$ una soluzione debole dell'equazione (3.4.39) e cioè per ogni $\varphi \in C^\infty$:

$$\int_a^b a(x, u(x), u'(x)) \varphi'(x) dx + \int_a^b b(x, u(x), u'(x)) \varphi(x) dx = 0, \quad (3.4.40)$$

allora u è di classe $C^\infty((a, b))$.

Proof. Sia $u \in W^{1,p}((a, b))$ una soluzione debole di (3.4.39), dalla condizione di crescita (H_1) segue che $a(x, u(x), u'(x))$ e $b(x, u(x), u'(x))$ sono funzioni di classe L^1 in (a, b) .

Definiamo

$$v(x) = a(x, u(x), u'(x)), \quad w(x) = b(x, u(x), u'(x)),$$

da (3.4.40) segue che w è la derivata debole di v , $v' = w$.

Dal momento che $w \in L^1((a, b))$ si ha che $v \in W^{1,1}$ e quindi v è continua e limitata in (a, b) , in particolare esiste una costante $c > 0$ tale che $|v(x)| = |a(x, u(x), u'(x))| \leq C$ per quasi ogni $x \in (a, b)$.

Dalla condizione (H_2) segue che u' deve essere limitata e quindi $u \in W^{1,\infty}$.

Proviamo ora che $u' \in W^{1,\infty}$ ed in particolare che u' soddisfa l'ultima condizione del Teorema 3.33 e cioè che per ogni $I_0 \subset \bar{I}_0 \subset (a, b)$ e $h \in R$ con $h < \text{dist}(I_0, R - I)$ esiste una costante $c > 0$ tale che per quasi ogni $x \in I_0$:

$$|u'(x+h) - u'(x)| \leq c|h|.$$

Infatti da (H_3) segue che

$$\alpha(u'(x+h) - u'(x)) \leq \int_{u'(x)}^{u'(x+h)} a_z(x, u(x), z) dz,$$

e quindi

$$\alpha|u'(x+h) - u'(x)| \leq |a(x, u(x), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))|,$$

che implica:

$$\begin{aligned} \alpha|u'(x+h) - u'(x)| &\leq |a(x, u(x), u'(x+h)) - a(x+h, u(x+h), u'(x+h))| + \\ &\quad |a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))|. \end{aligned}$$

Dal momento che $u \in W^{1,\infty}$ segue che

$$b(x, u(x), u'(x)) \in L^\infty \implies a(x, u(x), u'(x)) \in W^{1,\infty}$$

applicando alla funzione $a(x, u(x), u'(x))$ la caratterizzazione del Teorema 3.33, segue che

$$|a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x))| \leq c_1|h|$$

Inoltre dal fatto che $a(x, s, z) \in C^\infty$ si ha che è anche Lipschiziana nelle x e s quando variano in un insieme limitato di $I \times R$ e quindi esiste una costante L

$$|a(x+h, u(x+h), u'(x+h)) - a(x, u(x), u'(x+h))| \leq L(|h| + |u(x+h) - u(x)|) \leq c_2|h|,$$

dove l'ultima disuguaglianza si ottiene applicando alla funzione u la condizione del Teorema 3.33

Si ha quindi che $u' \in W^{1,\infty} \implies u \in W^{2,\infty}$.

Derivando il primo membro dell'equazione

$$\frac{d}{dx} a(x, u(x), u'(x)) = b(x, u(x), u'(x)). \quad (3.4.41)$$

si ottiene:

$$\frac{d}{dx} (a(x, u(x), u'(x))) = a_x(x, u(x), u'(x)) + u' a_s(x, u(x), u'(x)) + u'' a_z(x, u(x), u'(x))$$

e dividendo per $a_z(x, u(x), u'(x)) \neq 0$ l'equazione (3.4.41) diventa

$$u'' = \frac{b(x, u(x), u'(x)) - a_x(x, u(x), u'(x)) - u' a_s(x, u(x), u'(x))}{a_z(x, u(x), u'(x))}. \quad (3.4.42)$$

Poiché $u \in W^{2,\infty}$ si ha che u' è una funzione continua e quindi il secondo membro di (3.4.42) è continuo, allora u'' è una funzione continua e quindi $u \in C^2$.

Ritornando alla (3.4.42) segue che $u'' \in C^1$ e quindi $u \in C^3$ e così di seguito si prova che $u \in C^\infty$.